MÓDULO 3
EJE TEMÁTICO DE ESTA SEMANA: Álgebra y funciones
CONTENIDOS CURRICULARES:
Raíces cuadradas y cúbicas – Operatoria con raíces – Racionalización - Ecuación cuadrática - Función cuadrática

Raíces cuadradas y cúbicas

Comencemos el estudio de las raíces, haciéndonos la siguiente pregunta: Si el área de un cuadrado es 15 cm^2, ¿cuál es su área?

Para responder a esto, debemos encontrar un número cuyo cuadrado es 15, este número se denomina raíz cuadrada de 15 y es aproximadamente 3,8729.

Si generalizamos lo anterior podemos afirmar que: $\sqrt{a} = b \Rightarrow b^2 = a$.

Si *a* es un número positivo, entonces *b* es positivo; por lo tanto $\sqrt{9} = 3$ y no ±3 como erróneamente se cree. Por otro lado, la igualdad: $\sqrt{x^2} = x$ se cumple solo si x>0, ya que si tenemos $\sqrt{(-3)^2}$ esto no es igual a –3, ya que sería contradictorio con lo anterior. Por lo tanto, la propiedad es: $\sqrt{x^2} = |x|$ (para cualquier valor real de x).

Si en la raíz: $\sqrt{a}$, *a* es negativo, entonces la raíz no es un número real. Si la raíz es cúbica, tenemos que: $\sqrt[3]{a} = b \Rightarrow b^3 = a$.

En este caso, si *a* es negativo, *b* resulta ser negativo y si *a* es positivo, *b* también; por lo tanto, la raíz cúbica está definida para todo número real.

En general, las raíces se pueden definir mediante una potencia de exponente fraccionario:

Definición:
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, donde *n* se denomina el índice de la raíz; como vimos anteriormente, cuando este no aparece se entiende que es dos (raíz cuadrada).
La definición está sujeta a las restricciones que vimos en el párrafo anterior: es decir, las raíces de índice par están definidas para números no negativos y las de índice impar están definidas para todo número real.

Debido a que las raíces pueden convertirse a potencias de exponente fraccionario, cumplen con todas las propiedades de potencias que estudiamos en el módulo anterior; de estas se pueden deducir las siguientes propiedades de raíces:

Propiedades de las raíces

1) Multiplicación de raíces de igual índice:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

2) División de raíces de igual índice:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

3) Raíz de raíz:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

4) Raíz de una potencia cuyo exponente es igual al índice:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

5) Propiedad de amplificación:

$$\sqrt[n]{a^r} = \sqrt[nm]{a^{rm}}$$

6) Ingreso de un factor dentro de una raíz:

$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ (con la restricción que a>0 si *n* es par)

Observación: las propiedades anteriores son válidas solamente en el caso de que las raíces estén definidas en los números reales.

Veamos a continuación la demostración de algunas de las propiedades, para que veas su analogía con las propiedades de las potencias:

Demostración de (1):

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

Demostración de (5):

$$\sqrt[n]{a^r} = a^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{rm}{nm}} = \sqrt[nm]{a^{rm}}$$

Demostración de (6):

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

Operatoria con raíces

Adición y sustracción de raíces semejantes

Se llaman raíces semejantes aquellas que tienen la misma cantidad subradical. Por ejemplo, $2\sqrt{5}$ y $-7\sqrt{5}$ son raíces semejantes y se pueden sumar y/o restar:
En el caso de querer sumar o restar raíces no semejantes, se debe descomponer las cantidades subradicales para convertirlas a raíces semejantes.

Ejemplo:

$$\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{72} =$$

Descomponiendo las cantidades subradicales en forma conveniente:

$$\sqrt{18} - \sqrt{50} + \sqrt{72} = \sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{25 \cdot 2} + \sqrt{36 \cdot 2} = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Multiplicación y división de raíces de igual índice

En este caso aplicamos las propiedades 1 y 2 de las raíces.

Ejemplo:

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt{20} =$$

Descomponiendo las cantidades subradicales:

Multiplicación y división de raíces de distinto índice.

En este caso es conveniente utilizar la propiedad de amplificación para igualar índices.

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} =$$

El m.c.m. de los índices es seis, entonces amplificamos para igualar los índices a seis:

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^3}{2^2}} = \sqrt[6]{2}$$

Racionalización

La racionalización consiste en eliminar las raíces que se encuentran en el denominador de una fracción.

Analizaremos a continuación los casos más importantes:

Caso 1: una raíz cuadrada en el denominador, sin adiciones ni sustracciones.

Ejemplo:

Racionalizar: $\frac{4}{\sqrt{2}}$

Amplificamos la fracción por $\sqrt{2}$:

$$\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Caso 2: una raíz cuadrada en el denominador, con adiciones o sustracciones.

Ejemplo:

Racionalizar: $\frac{4}{2 - \sqrt{2}} =$

Amplificamos la fracción por $2 + \sqrt{2}$, para formar en el denominador una suma por su diferencia:

$$\frac{4}{2 - \sqrt{2}} = \frac{4 \cdot (2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{4 \cdot (2 + \sqrt{2})}{2^2 - 2} = 2 \cdot (2 + \sqrt{2}) = 4 + 2\sqrt{2}$$

Caso 3: una raíz cúbica en el denominador, sin adiciones o sustracciones.

Ejemplo:

Racionalizar: $\frac{4}{\sqrt[3]{2}} =$

Amplificamos la fracción por $\sqrt[3]{2^2}$:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\cancel{4} \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\cancel{2}} = 2 \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2 \cdot \sqrt[3]{4}$$

Una de las aplicaciones de la racionalización es que nos permite ordenar fracciones que tengan raíces en el denominador.

Ejemplo:

Ordenar de menor a mayor las siguientes fracciones:

$$x = \frac{2}{\sqrt{2}} \ ; \ y = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \ ; \ z = \frac{3}{\sqrt{2}-1}$$

Racionalizamos cada una de las fracciones:

$$x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$y = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2}) \cdot (1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}-1$$

$$z = \frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3 \cdot (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}+1)} = 3 \cdot (\sqrt{2}+1)$$

De lo anterior se deduce que: $y < x < z$

Ecuaciones irracionales

Una ecuación irracional es una ecuación que tiene la incógnita en alguna cantidad subradical. Para resolverla, se deben tratar de eliminar las raíces que aparezcan. Después de obtenido el valor de la incógnita, se debe comprobar reemplazando este valor obtenido en la ecuación original.

Ejemplo:

Resolver la ecuación: $\sqrt{1+\sqrt{2x-1}} = 2$

Primero elevamos al cuadrado a ambos lados de la ecuación, para eliminar la raíz exterior:

$\sqrt{1+\sqrt{2x-1}} = 2 \quad /(\ )^2$

$1+\sqrt{2x-1} = 4$,despejamos la raiz que queda:

$\sqrt{2x-1} = 3 \quad /(\ )^2$

$2x - 1 = 9$

$x = 5$

Comprobando en la ecuación original, tenemos:

$$\sqrt{1+\sqrt{2 \cdot 5-1}} = \sqrt{1+\sqrt{9}} = \sqrt{4} = 2$$

Por lo tanto, x=5 es solución de la ecuación.

Ejemplo:

$$\sqrt{1+x} - 2 = \sqrt{x-3}$$

Elevamos al cuadrado a ambos lados de la ecuación:

$\sqrt{1+x} - 2 = \sqrt{x-3} \ /(\ )^2$

$\left(\sqrt{1+x}-2\right)^2 = x-3$

$1 + x - 4\sqrt{1+x} + 4 = x - 3$

$-4\sqrt{1+x} = -8$

$\sqrt{1+x} = 2 \ / \ (\ )^2$

$1 + x = 4$

$x = 3$

Comprobando en la ecuación original, se obtiene:

$$\sqrt{1+3} - 2 = \sqrt{3-3}$$

Lo que es correcto, por lo tanto x=3 es solución de la ecuación.

Ecuación cuadrática

Una ecuación cuadrática es de la forma: $ax^2+bx+c=0$ (con a ¹ 0). Para resolverla existen diferentes métodos, que revisaremos a través de algunos ejemplos.

Por factorización

Resolver la ecuación: $x^2 - 12x - 28 = 0$.

Factorizamos el trinomio, buscando dos números que multiplicados den –28 y sumados den –12; estos son: -14 y 2, por lo tanto la factorización es:
$(x - 14)(x + 2) = 0$.

De aquí se deduce que las soluciones son x = 14 y x = -2.

Utilizando la fórmula

Para resolver la ecuación cuadrática: $ax^2+bx+c=0$ (con a ¹ 0), podemos utilizar la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo:

Resolvamos la siguiente ecuación:
$x^2 – 10x +24 = 0$.

En esta ecuación: a = 1; b = -10 y c = 24 ; reemplazando en la fórmula, obtenemos:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 2}{2}$$

Por lo tanto x = 6 ó x = 4

Por completación de cuadrados

Ejemplo:

Resolver la ecuación: $x^2 – 6x + 8 = 0$

Con los términos x^2 y –6x podemos formar el cuadrado de binomio:
$(x – 3)^2$

Pero nos faltaría el número 9, por lo tanto sumaremos 9 a ambos lados de la ecuación para formar el cuadrado de binomio:

$x^2 – 6x + 8 = 0$ /+9
$x^2 – 6x + 9 +8 = 9$
$(x - 3)^2 + 8 = 9$
$(x – 3)^2 = 1$

Por lo tanto, x –3 = 1 ó x – 3 = -1, de lo que se deduce que:
x = 4 ó x = 2

Planteo de problemas con ecuaciones cuadráticas

En el primer módulo vimos algunas resoluciones de problemas utilizando ecuaciones de primer grado. Ahora veremos algunos problemas cuyo planteo conduce a una ecuaciones cuadráticas.
Ejemplo:

Un número entero cumple con que el cuadrado del antecesor de su doble equivale a su cuadrado aumentado en 5.

Sea x el número entero, el enunciado se traduce en:
$(2x-1)^2 = x^2 + 5$.

Ordenando y reduciendo, se obtiene la ecuación cuadrática:

3x2 – 4x – 4 = 0.

Utilizando la fórmula, con a = 3 , b = -4 y c = -4

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6}$$

Ejemplo:

Un triángulo tiene un área de 24 cm^2 y la altura mide 2 cm más que la base correspondiente.

¿Cuánto mide la altura?

Sea x la base, entonces su altura es x+2, y su área es:

$$A = \frac{x(x+2)}{2}$$

La ecuación que resuelve el problema es: $\frac{x(x+2)}{2} = 24$.

Ordenando e igualando a cero, obtenemos la ecuación:
x2+2x-48=0.

Factorizando: (x-6)(x+8) = 0 x = 6 ó x = -8

Como x es una longitud, debe ser positiva o cero, por lo tanto x = 6 y la altura mediría 8 cm.

Naturaleza de las soluciones de una ecuación cuadrática

Hemos visto que las soluciones de la ecuación cuadrática: $ax^2+bx+c=0$ (con a ¹ 0) se pueden obtener a través de la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La cantidad subradical: D = b^2–4ac se llama discriminante, la cual nos permite determinar el tipo de soluciones que tiene la ecuación cuadrática.

Si el discriminante resulta ser negativo estaríamos calculando la raíz de un número negativo, por lo tanto las soluciones no serían números reales. Si el discriminante es cero las soluciones serían iguales, y si es positivo las soluciones serían dos números reales y distintos.

Resumiendo:

Δ	tipos de soluciones
-	no reales
0	reales e iguales
+	reales y distintas

Ejemplo:
¿Cuánto debe valer *p*, para que las soluciones de la ecuación x^2 – (p+3)x + 9 = 0 sean reales e iguales?

Como las soluciones son reales e iguales el discriminante debe ser cero:
$b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (-(p+3))^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0 \Rightarrow p^2 + 6p - 27 = 0$.
Factorizando: (p + 9)(p - 3) = 0 ⇒ p = -9 ó p = 3.
Propiedades de las soluciones de la ecuación cuadrática

Sean x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación: $ax^2+bx+c=0$ (con a ¹ 0), y supongamos que:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por lo tanto, la suma de las soluciones es:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

y el producto de las soluciones es:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{(b^2-(b^2-4ac))}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Es decir, podemos obtener a través de los coeficientes de la ecuación la suma y la multiplicación de las soluciones, sin tener que resolverla.

Resumiendo:

Si x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ (con a ¹ 0), entonces:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{y}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Función cuadrática

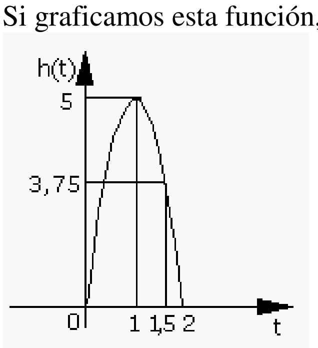
Una función cuadrática es de la forma: $f(x)= ax^2+bx+c$ y su gráfica es una parábola. Una de las aplicaciones de la función cuadrática es la altura h(t) que alcanza un objeto después de t segundos, cuando es lanzado verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial v_o:

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Si suponemos que la velocidad inicial es 10 m/s y que la aceleración es 10 m/s^2, entonces la altura es: $h(t) = 10t - 5t^2$. Si nos damos algunos valores para *t*, obtenemos:

t	h(t)
0	0
1	5
1,5	3,75
2	0

Si graficamos esta función, obtenemos aproximadamente el siguiente gráfico:



La intersección con el eje de las abscisas (eje horizontal) se obtiene reemplazando *h*(t) = 0 en la función:

$h(t) = 10t - 5t^2$
$0 = 10t - 5t^2$, factorizando: $5t(2 - t) = 0$, obtenemos t = 0 ó t = 2.

Interpretando físicamente lo anterior, podemos afirmar que a los 0 y 2 segundos la altura del objeto es cero, es decir, está en el suelo.

Por otro lado, se puede observar en el gráfico que a 1 segundo se encuentra la máxima altura. Si reemplazamos *h* = 1 en la función, obtenemos $h(1)= 10 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = 5$ m.

El punto donde se alcanza el valor máximo de la función se denomina *vértice*.

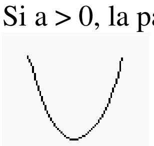
Analicemos a continuación, en forma general, las características del gráfico de una función cuadrática:

Elementos principales del gráfico de la función cuadrática

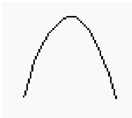
Sea la función cuadrática: $f(x)= ax^2+bx+c$, sus elementos y características principales son:

Concavidad

Si a > 0, la parábola se abre hacia arriba:



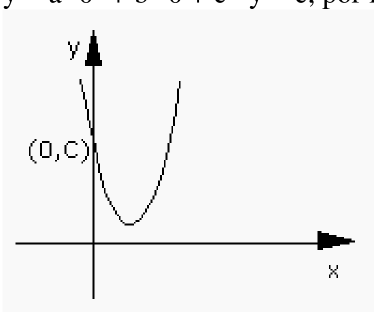
Si a < 0, la parábola se abre hacia abajo:



Intersección con eje y

Sea la función cuadrática: $f(x)= ax^2+bx+c$, cuando su gráfica intercepte el eje y debe acontecer que $x = 0$. Si reemplazamos en la ecuación, obtenemos:

$y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \quad y = c$, por lo tanto la intersección con el eje x es el punto (0,c).



Intersección con eje x

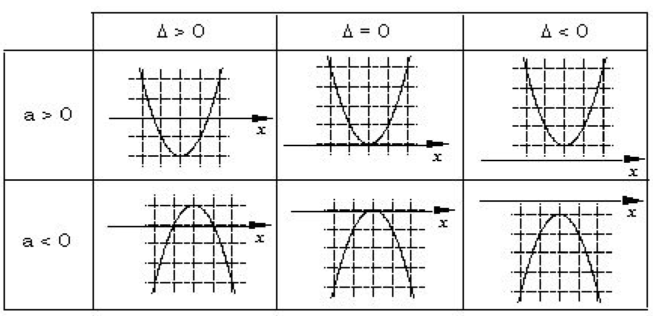
Cuando la gráfica intercepte el eje x, debe ocurrir que $y = 0$. Si reemplazamos en la ecuación, obtenemos:

$0= ax^2+bx+c$, por lo tanto las intersecciones de la función cuadrática con el eje x se obtienen resolviendo las ecuación de segundo grado.

Como las soluciones dependen del signo del discriminante, tenemos que:

- Si $D < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales, por lo tanto la parábola no corta el eje x.
- Si $D= 0$, la ecuación tiene soluciones reales iguales, por lo tanto la parábola es tangente al eje x.
- Si $D > 0$, la ecuación tiene soluciones reales y distintas, por lo tanto la parábola corta en dos puntos al eje x.

Si juntamos lo visto hasta ahora, tenemos las siguientes posibilidades:

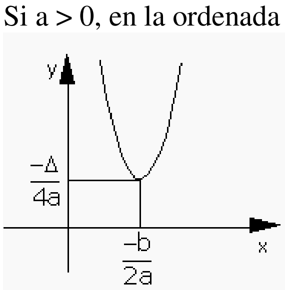


Vértice

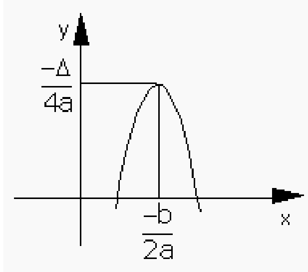
El vértice de la parábola de ecuación: $y = ax^2+bx+c$ es el punto:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

Si $a > 0$, en la ordenada del vértice se encuentra el mínimo de la función:

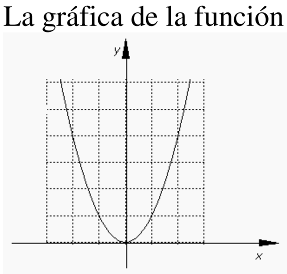


Si a < 0, en la ordenada del vértice se encuentra el máximo de la función:



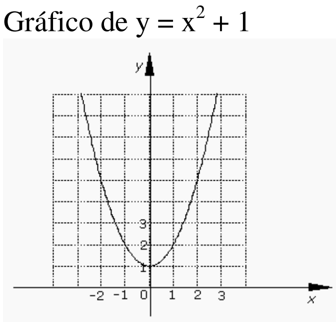
Traslación del gráfico de la función cuadrática

La gráfica de la función cuadrática: $y = x^2$ es:



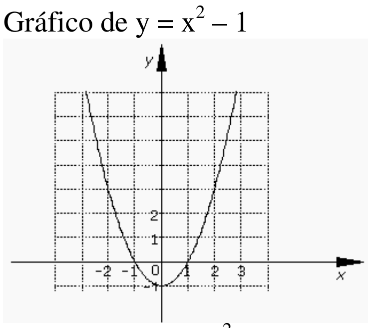
Observemos a continuación cómo es afectada la gráfica cuando sumamos o restamos una constante a la variable independiente (x) o a la variable dependiente (y).

Gráfico de $y = x^2 + 1$



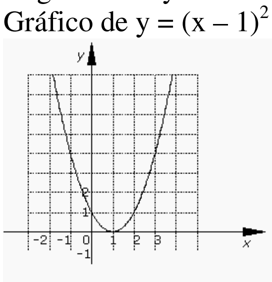
El gráfico de $y = x^2$ se traslada una unidad hacia arriba.

Gráfico de $y = x^2 - 1$



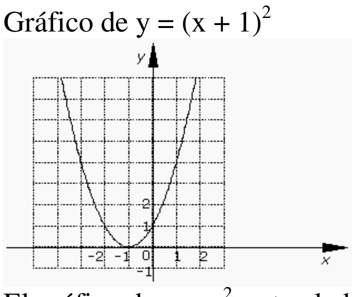
El gráfico de $y = x^2$ se traslada una unidad hacia abajo.

Gráfico de $y = (x - 1)^2$



El gráfico de $y = x^2$ se traslada una unidad hacia la derecha.

Gráfico de $y = (x + 1)^2$

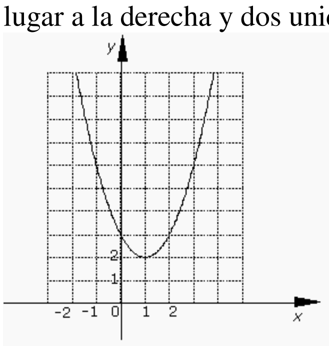


El gráfico de $y = x^2$ se traslada una unidad hacia la izquierda.

Ejemplo:

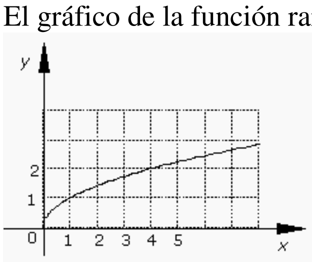
Graficar la función: $y = (x - 1)^2 + 2$.

Según lo visto anteriormente, el gráfico corresponde a una traslación de la gráfica de $y = x^2$, un lugar a la derecha y dos unidades hacia arriba.



Función raíz cuadrada

El gráfico de la función raíz cuadrada es:



A esta gráfica le podemos aplicar las traslaciones horizontales, tal como lo hicimos a la función: $y = x^2$

Por ejemplo, el gráfico de $y = \sqrt{x - 1}$ correspondería al gráfico de $y = \sqrt{x}$.

Trasladado una unidad a la derecha: