

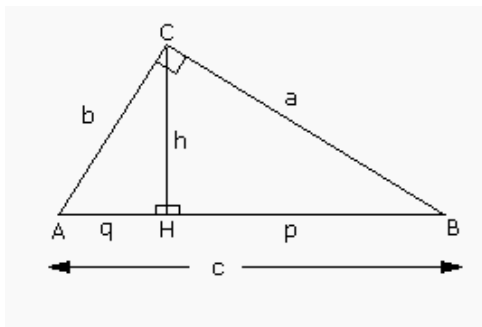
### MÓDULO 3 Geometría

CONTENIDOS CURRICULARES:

Teorema de Euclides -Teorema de Pitágoras y aplicaciones - Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

#### Segmentos proporcionales en el triángulo rectángulo

En el  $\triangle ABC$  rectángulo en C de la figura:



Se pueden establecer las siguientes semejanzas:

$$\triangle AHC \sim \triangle ACB \quad (A,A)$$

$$\angle CAH \cong \angle CAH \quad (\text{ángulo común})$$

- 1)  $\angle AHC \cong \angle ACB$  (ángulos rectos)

De esta semejanza, se obtienen las siguientes proporciones:

$$\frac{AH}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{HC}{CB} \Leftrightarrow \frac{q}{b} = \frac{b}{c} = \frac{h}{a}$$

$$\triangle BHC \sim \triangle BCA \quad (A,A)$$

$$\angle CBH \cong \angle ABC \quad (\text{ángulo común})$$

- 2)  $\angle BHC \cong \angle BCA$  (ángulos rectos)

De esta semejanza, se tiene:

$$\frac{BH}{BC} = \frac{BC}{AB} = \frac{HC}{CA} \Leftrightarrow \frac{p}{a} = \frac{a}{c} = \frac{h}{b}$$

$$\triangle AHC \sim \triangle CHB \quad (A,A)$$

$$\angle CAH \cong \angle BCH \quad (\text{porque } \angle BCH = 90^\circ - \angle ACH \text{ y } \angle CAH = 90^\circ - \angle ACH)$$

- 3)  $\angle BHC \cong \angle BCA$  (ángulos rectos)

De aquí se obtienen las proporciones:

$$\frac{AH}{CH} = \frac{HC}{HB} = \frac{AC}{CB} \Leftrightarrow \frac{q}{h} = \frac{h}{p} = \frac{b}{a}$$

$$\text{De 1): } \frac{q}{b} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b^2 = qc$$

$$\text{De 2): } \frac{p}{a} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow a^2 = pc$$

$$\text{De 3): } \frac{q}{h} = \frac{h}{p} \Leftrightarrow h^2 = pq$$

Estas tres relaciones obtenidas corresponden al Teorema de Euclides.

#### Teorema de Euclides referente al cateto

El cuadrado de un cateto equivale al producto del cateto por la proyección de él sobre la hipotenusa.

$$a^2 = pc$$

$$b^2 = qc$$

### Teorema de Euclides referente a la hipotenusa

El cuadrado de la altura equivale al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

$$h^2 = pq$$

Además de los teoremas anteriores, se puede obtener una relación para determinar la altura, a través de los lados del triángulo rectángulo:

De 2) tenemos que:  $\frac{a}{c} = \frac{h}{b}$ , por lo tanto,  $h = \frac{ab}{c}$

Por lo tanto, la altura equivale al producto de los catetos dividido por la hipotenusa.

Otro teorema importante en el triángulo rectángulo es el siguiente:

### Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la hipotenusa equivale a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Este teorema lo podemos demostrar utilizando los teoremas anteriores, como veremos a continuación:

Por Euclides tenemos que:  $a^2 = pc$  y  $b^2 = qc$ , entonces

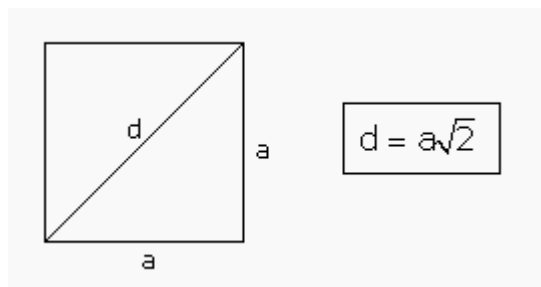
$a^2 + b^2 = pc + qc = c(p+q)$ , pero  $p+q=c$ . Si reemplazamos obtenemos:

$$a^2 + b^2 = c(p+q) = c \cdot c = c^2$$

### Aplicaciones del Teorema de Pitágoras

1) Diagonal de un cuadrado

La diagonal de un cuadrado equivale al producto del lado por  $\sqrt{2}$



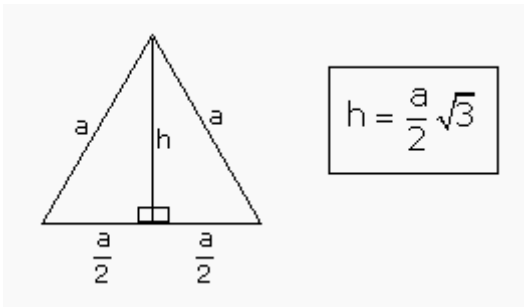
Demostración:

Utilizando el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}d^2 &= a^2 + a^2 \\d^2 &= 2a^2 / \sqrt{\phantom{x}} \\d &= a\sqrt{2}\end{aligned}$$

2) Altura de un triángulo equilátero

La altura de un triángulo equilátero equivale a la mitad del lado por  $\sqrt{3}$



Demostración:

En la figura, por ser un triángulo equilátero, la altura cae en el punto medio del lado opuesto. Ocupando el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3a^2}{4} \quad / \sqrt{\quad}$$

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

**Ejemplo:**

En la figura, el polígono es un hexágono regular cuyo lado mide 12 cm.

¿Cuánto mide la superficie sombreada?



Cada uno de los triángulos sombreados corresponde a un triángulo equilátero de lado 12 cm. La altura, según la fórmula anterior, es:

$$\frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{12}{2} \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

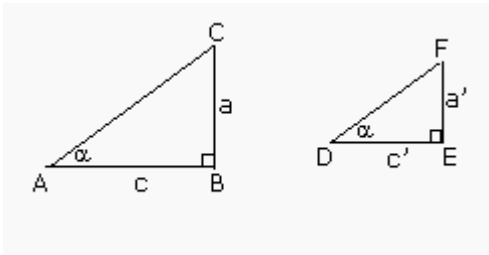
El área de cada triángulo sombreado es:

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$$

Por lo tanto, el área sombreada es:  $(36\sqrt{3}) \cdot 3 = 108\sqrt{3} \text{ cm}^2$ .

### Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Supongamos que tenemos los triángulos rectángulos ABC y DEF de la figura, que tienen un ángulo agudo  $\alpha$  congruente.



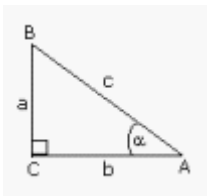
Por el criterio (A,A) los triángulos son semejantes, por lo tanto:

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} \quad \text{o bien:} \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$$

Es decir, si se conoce uno de los ángulos agudos, la razón entre dos lados del triángulo rectángulo es constante.

Debido a que la razón entre los lados es constante y depende exclusivamente del ángulo  $\alpha$ , se definieron todas las razones posibles entre dos de los lados del triángulo rectángulo. Estas razones se denominan *razones trigonométricas en el triángulo rectángulo* y se definen de la siguiente forma:

Sea el  $\triangle ABC$ , rectángulo en C de la figura:



Se definen las siguientes razones trigonométricas para el ángulo agudo  $\alpha$ :

Razón trigonométrica	Definición	En la figura
$\text{sen } \alpha$	$\frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{a}{c}$
$\text{cos } \alpha$	$\frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$	$\frac{b}{c}$
$\text{tg } \alpha$	$\frac{\text{cateto opuesto a } \alpha}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$	$\frac{a}{b}$
$\text{ctg } \alpha$	$\frac{\text{cateto adyacente a } \alpha}{\text{cateto opuesto a } \alpha}$	$\frac{b}{a}$
$\text{sec } \alpha$	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \alpha}$	$\frac{c}{b}$
$\text{cosec } \alpha$	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a } \alpha}$	$\frac{c}{a}$

### Propiedades de las razones trigonométricas

Observa que las razones trigonométricas cumplen las siguientes propiedades:

- 1)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$
- 2)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$
- 3)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$
- 4)  $\operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha}$
- 5)  $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$
- 6)  $\operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$
- 7)  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{sec}^2 \alpha$

Las propiedades 6 y 7 se llaman identidades pitagóricas y las demostraremos a continuación:

Demostración de 6:

En el  $\triangle ABC$  anterior, teníamos que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} \quad \text{y} \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{b}{c};$$

, por lo tanto:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

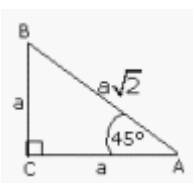
Demostración de 7:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} = \operatorname{sec}^2 \alpha$$

Observa que en ambas demostraciones ocupamos que  $a^2 + b^2 = c^2$ , motivo por el cual ambas identidades se denominan identidades pitagóricas.

### Razones trigonométricas para ángulos de $30^\circ$ , $45^\circ$ y $60^\circ$

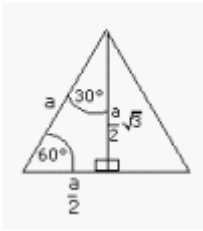
Si consideramos un triángulo rectángulo isósceles de cateto "a", entonces la hipotenusa mide  $a\sqrt{2}$  (ver diagonal de un cuadrado).



Si en este triángulo calculamos las razones trigonométricas, obtenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 45^\circ &= \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{cos} 45^\circ &= \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} 45^\circ &= \frac{a}{a} = 1 \\ \operatorname{ctg} 45^\circ &= \frac{a}{a} = 1 \\ \operatorname{sec} 45^\circ &= \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \\ \operatorname{cosec} 45^\circ &= \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Para calcular las razones trigonométricas para los ángulos de  $30^\circ$  y  $60^\circ$ , ocuparemos el triángulo equilátero de la figura:



En el triángulo rectángulo, se cumple que:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} = \text{cos } 60^\circ$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen } 60^\circ$$

$$\text{tan } 30^\circ = \frac{a/2}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \text{ctg } 60^\circ$$

$$\text{ctg } 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a/2} = \sqrt{3} = \text{tg } 60^\circ$$

$$\text{sec } 30^\circ = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \text{cosec } 60^\circ$$

$$\text{cosec } 30^\circ = \frac{a}{a/2} = 2 = \text{sec } 60^\circ$$

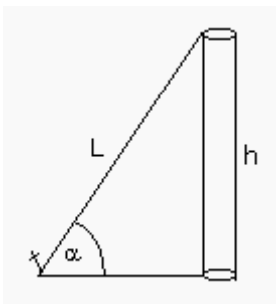
Resumiendo, las razones trigonométricas sen, cos y tan para 30°, 45° y 60° son:

$\alpha$	sen $\alpha$	cos $\alpha$	tg $\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

### Aplicaciones de las razones trigonométricas en el cálculo de distancias

#### Ejemplo:

El poste de altura  $h$  está sujeto por una cuerda de longitud  $L$  con un ángulo de inclinación  $\alpha$ . ¿Cuál es la altura del poste?



En el triángulo rectángulo de la figura se conoce la hipotenusa y se requiere calcular el cateto opuesto, por lo tanto, ocupamos la razón trigonométrica

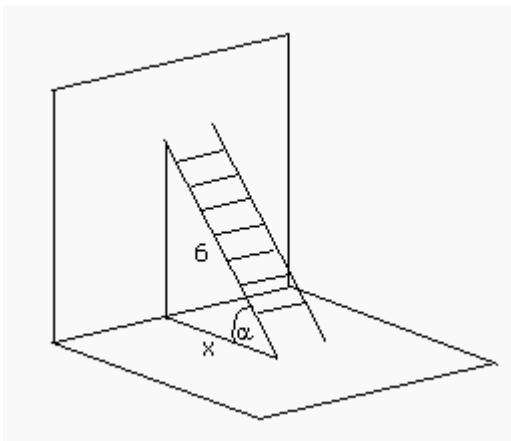
sen  $\alpha$ :

$$\text{sen } \alpha = \frac{h}{L} \Rightarrow h = L \cdot \text{sen } \alpha$$

Expresión que nos permite calcular la altura del poste, conocidos  $\alpha$  y  $L$ .

### Ejemplo:

Una escalera de 6 m. de largo se apoya en un muro vertical, con un ángulo de inclinación  $\alpha$ . ¿A qué distancia se ubica la base de la escalera del muro?



En el triángulo rectángulo de la figura conocemos  $\alpha$ , la hipotenusa y deseamos calcular el cateto adyacente a  $\alpha$ . Utilizando la razón trigonométrica  $\cos \alpha$ , tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 6 \cdot \cos \alpha$$

Por lo tanto, la distancia de la base de la escalera al muro es  $6 \cdot \cos \alpha$ .