

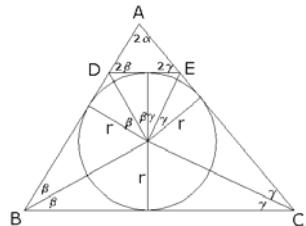
**Problema 1**

Empezamos con un problemita de Geometría, donde se combina con los conocimientos de trigonometría. A mi me gustó mucho.

Sea un triángulo ABC; D un punto en AB y E un punto en AC tal que DE y BC son paralelas y DE es una tangente al incírculo de ABC. Probar que:  $8DE \leq AB + BC + CA$ .

Fuente: 1998-1999 Olympiad Correspondence Problems – Set 2 – Problema 11

**Solución**



Sea  $r$  el inradio y  $2\alpha$ ,  $2\beta$  y  $2\gamma$  los ángulos respectivos A, B y C. Entonces:  $DE = r(\tan\beta + \tan\gamma)$ ,  $BC = r(\cot\beta + \cot\gamma)$

$$AB + BC + CA = 2r(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma) = 2r \cot\alpha \cot\beta \cot\gamma$$

Ahora:  $\cot\alpha = \tan(\beta + \gamma) = \frac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta \cdot \tan\gamma}$

para que:  $\tan\beta + \tan\gamma = \cot\alpha[1 - \tan\beta \tan\gamma]$  y  $DE = r \cot\alpha[1 - \tan\beta \tan\gamma]$ .

Sea  $t = \tan\beta \tan\gamma$ . Entonces  $8DE \leq AB + BC + CA$  es equivalente a:  $4 - 4 \tan\beta \tan\gamma \leq \cot\beta \cot\gamma$ , lo cual a su vez es equivalente a:  $4t^2 - 4t + 1 = (2t - 1)^2 \geq 0$  Así, el resultado se establece una vez que verificamos que el producto de las cotangentes de los ángulos que suman  $90^\circ$  es igual a la suma de las mismas cotangentes. Pero, si  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ , entonces:

$$\begin{aligned} \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} + \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} \\ &= \cos\gamma \left[ \frac{\sin\gamma + \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} \right] = \cos\gamma \left[ \frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} \right] = \cos\gamma \left[ \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} \right] \\ &= \cot\alpha \cdot \cot\beta \cdot \cot\gamma \end{aligned}$$

Solución: Traducida y adaptada por Aldo Gil C.

**Problema 2**

Suponer A, B y C son enteros positivos tales que:  $\frac{24}{5} = A + \frac{1}{B + \frac{1}{C+1}}$ . Hallar el valor de:

$$A + 2B + 3C$$

Fuente: Round of the British Columbia -2000-Problema

**Solución**

Me gustó la solución ingeniosa de este sencillo problema, veamos:

Como B y C son enteros positivos, vemos

que  $B + \frac{1}{C+1} > 1$ , por lo tanto su recíproco

es menor que 1. Por lo tanto A representa la parte entera de  $24/5$ ; esto es

$$A = 4. \text{ Entonces nos queda: } \frac{4}{5} = \frac{1}{B + \frac{1}{C+1}}$$

$$\text{ó } \frac{5}{4} = B + \frac{1}{C+1}$$

Con el mismo razonamiento anterior vemos que B es la parte entera de  $5/4$ ; por lo tanto  $B=1$ . De aquí es fácil deducir el

valor de C con la ecuación:  $\frac{1}{4} = \frac{1}{C+1}$ .

Despejando  $C=3$ .

Luego nos piden:  $A + 2B + 3C =$

$$4 + 2(1) + 3(3) = 15.$$

Una solución bastante filosofada eh!!!

Solución: Descubierta, traducida y adaptada por Aldo Gil C.

**Problema 3**

Resolver la ecuación:  $x - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{91}{60}$

**Solución**

Sea  $x = \sec A$ , esto implica que:  $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \cos ec A$ . ¿Como?

Nuestra ecuación queda así:  $\sec A - \operatorname{cosec} A = \frac{91}{60}$

$$\Rightarrow 60(\sec A - \operatorname{cosec} A) = 91 \sec A \cdot \cos A$$

$$\Rightarrow 3600(1 - 2\sec A \cdot \cos A) = 8281 \sec^2 A \cdot \cos^2 A$$

Sea  $p = 2\sec A \cos A = \sec 2A$ .

$$\Rightarrow 14400(1 - p) = 8281p^2$$

$$\Rightarrow 8281p^2 + 14400p - 14400 = 0$$

$$\Rightarrow p = 120/169$$

El valor negativo de p es rechazado ¿Por qué?

$$\Rightarrow \sec 2A = \frac{120}{169}$$

$$\Rightarrow \cos 2A = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{120}{169}\right)^2} = \pm \frac{119}{169}$$

$$\Rightarrow 2\cos 2A - 1 = \pm \frac{119}{169}$$

$$\Rightarrow \cos 2A = \frac{25}{169} \text{ ó } \frac{144}{169}$$

$$\Rightarrow \cos A = \pm \frac{5}{13} \text{ ó } \pm \frac{12}{13}$$

Como  $x = \sec A$ , entonces  $x = \pm \frac{13}{5}$ , ó  $\pm \frac{13}{12}$ . Chequeando los valores en la ecuación,

vemos que solo se cumple para  $x = -13/12$  y para  $x = 13/5$  (Dos soluciones)

Comentario: Realmente las ecuaciones deben ser tratadas como tales, pero este artificio trigonométrico realmente me encanto, eso sí, averigüen ese par de pasos que quedaron pululando en el aire. Lindo ¿eh?

Solución: Descubierta, traducida y adaptada por Aldo Gil C.

Problema 4

Dos amigos pactan un encuentro para almorzar entre las 12:00 y 13:00 h. Algunos días después, ambos tienen problema para el momento exacto, mas ninguno de ellos desiste de ir al encuentro y resuelven ir en forma aleatoria sin ponerse de acuerdo, siempre entre las 12:00 y las 13:00 horas. Si cada uno decide esperar como máximo 10 minutos. ¿Cuál es la probabilidad de que almorcen juntos ese día? (ellos no tiene teléfono celular!!!)

Fuente: Ojesed Mirror 09 de Mayo de 2006 – Lista OBM - Problema de almuerzo

Solución

Siendo 60 minutos el intervalo de llegada y 10 minutos el tiempo de espera para ambos tenemos:

La probabilidad de que no se encuentren es (60-10)^2 / 60^2 = 69,44%

La probabilidad de que se encuentren es 1-69,44% = 30,56%

Para detalles, vea la página 35 del libro de Papoulis que explora bien este tema.

Comentario: No me parece de buen gusto que a la hora del almuerzo nos pongamos a jugar con probabilidades, yo estaría pensando en el bife de carne o la chuleta de cerdo: pero en fin cada loco con su tema

Solución: Traducida del portugués y adaptada por Aldo Gil C.

Problema 5

Un boleto de Metro, que tiene seis dígitos, se considera "número de la suerte", si sus seis dígitos son diferentes y sus tres primeros dígitos suman lo mismo que los tres últimos (Un número tal como 026134 es "número de la suerte"). Demuestre que la suma de todos los "números de la suerte" es divisible por 2002.

Solución 1

En principio podemos deducir lo siguiente:

Si tomamos cualquier número de la suerte, por ejemplo 236407, siempre va a tener uno que tiene sus cifras invertidas,

tomándolas de a 3, o sea le correspondería al anterior el 407236. Si sumamos ambos números 236407+407236, siempre nos da un número que es múltiplo de 1001. Por lo tanto si podemos probar que la cantidad de números de la suerte es par, será múltiplo de 2002 la suma de todos ellos.

Evidentemente el total de números de la suerte es par, porque como dije antes, cualquier número tiene su inverso.

Ampliando un poco más, dados 6 números diferentes que sean número de la suerte, existen 6 permutaciones para los primeros 3 números y 6 para los últimos

Solución: Pablo Adrián Sussi

Solución 2

Esta es una brillante solución que no se puede dejar pasar, sobre todo por ser académica

Si xyzrst es un número de la suerte (según la definición dada), también lo es todo aquel número cuyas tres primeras cifras sean una permutación de xyz y sus tres últimas cifras una permutación de rst.

Sea N= abcdef, un número de la suerte fijado cualquiera (que sabemos existe), y vamos a calcular la suma S, de todos los números de la suerte que tengan las mismas tres primeras cifras y las mismas tres últimas cifras.

3 o sea 36 combinaciones para esos 6 números, a estos hay que multiplicarlos por 2, porque los 3 de adelante pasan a estar atrás y viceversa, quiere decir que para cada 6 números distintos que cumplan con el requisito de ser número de la suerte existen 72 combinaciones de formas distintas. Cualquiera que sea el número de veces que se pueden hallar 6 números distintos que cumplan con el requisito, en 72 combinaciones aparecerá 12 veces cada uno al final, por lo tanto cualquier número multiplicado por 12 da par, y la suma de todos pares múltiplos de 1001, es múltiplo de 2002.

Denoto por Sabc, la suma de todos los números de la suerte cuyas tres primeras cifras son abc (en ese orden), y sus últimas tres cifras coincidentes con una permutación cualquiera de las tres últimas cifras de N= abcdef.

Sabc = 6 \* (100a + 10b + c) \* 10^3 + 100 \* (2d + 2e + 2f) + 10 \* (2d + 2e + 2f) + (2d + 2e + 2f) = 6000 \* (100a + 10b + c) + 222 \* (d + e + f)

Sabc = 6000 \* (100a + 10b + c) + 222 \* (d + e + f)

Análogamente:

Sbac = 6000 \* (100b + 10a + c) + 222 \* (d + e + f)

Sacb = 6000 \* (100a + 10c + b) + 222 \* (d + e + f)

Scab = 6000 \* (100c + 10a + b) + 222 \* (d + e + f)

$$S_{bca} = 6000 \cdot (100b + 10c + a) + 222 \cdot (d + e + f)$$

$$S_{cba} = 6000 \cdot (100c + 10b + a) + 222 \cdot (d + e + f)$$

Y, sumando las seis expresiones:

$$S = 6000 \cdot [200 \cdot (a+b+c) + 20 \cdot (a+b+c) + 2 \cdot (a+b+c)] + 6 \cdot 222 \cdot (d+e+f) = 6000 \cdot 222 \cdot (a+b+c) + 6 \cdot 222 \cdot (d+e+f)$$

Y como  $a+b+c = d+e+f$  por definición  
 $\Rightarrow S = 222 \cdot (a+b+c) \cdot (6000 + 6) = 111 \cdot (a+b+c) \cdot 12012$

Luego, por lo tanto,  $S$  es un múltiplo de 12012, y al ser 12012 constante e independiente de  $a, b, c$  entonces la suma de todos los números de la suerte, es divisible entre 12012 y, por consiguiente, también entre 2002.

Solución: Diana Barredo Blanco

**Problema 6**

Aquí va uno muy viejo que solía proponer en mis clases de Secundaria por el año 1969. Yo tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes. Y cuando tú tengas la edad que yo tengo nuestras edades sumarán 81. Hallar las edades de ambos.

Propuesto por: Raúl H. Cobas

**Solución**

Con las edades podemos plantear las siguientes ecuaciones

$$a = 2(b - (a - b))$$

$$a = 4b - 2a$$

$$a = 4/3 \text{ de } b$$

Por otro lado cuando  $b$  tenga la edad que tiene ahora  $a$ , ambos sumarán 81;

$$a + b + 2(a - b) = 81$$

$$3a - b = 81$$

Reemplazamos y tenemos  $\frac{12}{3} b - b = 81$ ;

$$3b = 81 \quad b = 27. \text{ Luego } a = 36$$

Cuando  $a$  tenía 27 años,  $b$  tenía 18 (la mitad de 36), y dentro de 9 años,  $b$  tendrá 36 y  $a = 45$ . En total 81 años

Solución: Pablo Adrian Sussi

**Problema 7**

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + w^2 + z^2 = 65$$

$$(y+z)^2 + (x+w)^2 = 117$$

$$(x+z)^2 + (y+w)^2 = 113$$

$$(x+y)^2 + (z+w)^2 = 125$$

**Solución**

$$x^2 + y^2 + w^2 + z^2 = 65$$

$$(x+z)^2 + (y+w)^2 = 113$$

De acá deducimos que  $2xz + 2yw = 48$  implica que  $xz + yw = 24$

$$(y+z)^2 + (x+w)^2 = 117 \text{ de igual forma}$$

$$yz + xw = 26$$

$$(y+x)^2 + (w+z)^2 = 125 \text{ de igual forma}$$

$$yx + wz = 30$$

Ahora bien vemos que 2, 3, 4 y 6 cumplen con la primera ecuación.

Solución: Pablo Adrián Sussi

A su vez en la última vemos que puede ser  $100+25$  por lo tanto  $y+x=10$   $w+z=5$ . Tenemos que  $x$  y  $y$  valen 6 y 4 y a su vez  $w$   $z$  3 y 2 pero no sabemos el orden  $yz+xw=26$  por lo tanto lo único posible es  $6 \cdot 3 + 4 \cdot 2$ . Por lo tanto  $x=4$   $y=6$   $z=3$   $w=2$ . Comprobamos y todas las ecuaciones cumplen las condiciones.

**Problema 8**

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y = 8$$

$$y^2 + x = 60$$

**Solución**

$$x^2 + y = 8$$

$$y^2 + x = 60$$

Despejamos  $x = \sqrt{8-y} = 60-y^2$

$$60 = \sqrt{8-y} + y^2$$

Solución: Pablo Adrián Sussi

Para el máximo positivo de  $y=7$  no llegamos a 60, luego  $y$  debe ser negativo, vemos que vale -8, luego  $x$  también es negativo y vale -4.

**Problema 9**

Este si es de mi cosecha, hace un montón de años cuando enseñaba en una Academia, suerte que encontré los originales

Calcular  $a+n$  si se cumple:  $\overline{(n^2)n10}_a = \overline{aaa}_6$

**Solución**

Tenemos que  $a > 16 \dots (I)$

También  $n < a < 16$

Por lo tanto  $n^2 < 16 \Rightarrow n < 4$

Por lo que:  $n = 1 \quad \overline{1110}_a = \overline{aaa}_{16}$

$$n = 2 \quad \overline{4210}_a = \overline{aaa}_{16}$$

$$n = 3 \quad \overline{9310}_a = \overline{aaa}_{16}$$

Si  $n = 1 \quad \overline{1110}_a = \overline{aaa}_{16}$

Descomponiendo:  $a^3 + a^2 + a = 273a$

$\Rightarrow a=16$ .....(Falso $a<16$ ) Si $n = 2$ $\overline{4210}_a = \overline{aa1}_6$ Descomponiendo: $4a^3 + 2a^2 + a = 273a$ $\Rightarrow a=8$ ..... <u>Solución</u>	Luego $a+n=10$ Descartar $n= 3$ ..... ¿Por qué?
---	--

Problema 10

En un cuadrilátero  $ABCD$ , tenemos que  $\angle A + \angle B = 2\alpha < 180^\circ$ , y  $BC=AD$ . Se construyen los triángulos isósceles  $DCI$ ,  $ACJ$  y  $DBK$ , donde  $I$ ,  $J$  y  $K$  están al otro lado de  $CD$  con relación a  $A$ , tal que  $\angle ICD = \angle IDC = \angle JAC = \angle JCA = \angle KDB = \angle KBD = \alpha$ . Demostrar que  $I, J$  y  $K$  son colineales y determinar cual es la posición sobre una línea.

*Fuente: Ferry Leversha, London, England, aparecido en Crux-Año 2000-Problema 2457*

**Solución:**

Como  $\triangle ICD \sim \triangle JCA$ , tenemos  $\triangle JIC \sim \triangle ADC$  (lado-ángulo-lado), para que  $\angle JIC = \angle ADC$ . En forma similar  $\triangle ICD \sim \triangle KBD$ , tenemos  $\triangle DIK \sim \triangle DCB$  y  $\angle DIK = \angle DCB$ . Por consiguiente,  $\angle JIK = \angle JIC + \angle DIK - \angle CID = (\angle ADC + \angle DCB) - \angle CID = (2\pi - 2\alpha) - (\pi - 2\alpha) = \pi$  (por consecuencia en  $ABCD$ ,  $\angle A + \angle B = 2\alpha$ , mientras que  $\triangle CID$  tiene los ángulos de la base iguales a  $\alpha$ ).

Consecuentemente,  $JIK$  es una línea recta.

Mas aun,  $\frac{IJ}{IC} = \frac{AD}{CD} = \frac{BC}{CD} = \frac{IK}{ID} = \frac{IK}{IC}$ . Por ende,  $IJ=IK$ , ó  $I$  es el punto medio de  $JK$ .

*Solución: Meter Y. WOO, La Mirada USA y traducción con edición por Aldo Gil*

*Bueno, no será muy bueno ni difícil, pero de vez en cuando es necesario poner algo propio, no creen?*

*Por otro lado allá por lo 70 ¿ jamás imagine que pudiera estar poniendo esto en Internet y disparándolo por las fronteras..... Menos mal que estoy con vida para disfrutarlo*

*Hasta la próxima*

*Aldo Gil Crisóstomo*