Problema 1

¿Podrían resolver el siguiente problema?

Sean a y b dos números reales tales que verifican:

$$a^3-3a^2+5a-17=0$$

$$b^3-3b^2+5b+11=0$$

Calcular el valor de $a+b$.

Propuesto por: phy07

Solución

Sea $s = a + b$. Despejando b y sustituyendo en la segunda, tenemos,

$(s - a)^3 - 3(s - a)^2 + 5(s - a) + 11 = 0$

$a^3 + 3(1 - s)a^2 + (3s^2 - 6s + 5)a - s^3 + 3s^2 - 5s - 11 = 0$

Tenemos entonces dos ecuaciones cúbicas, y mónicas, que deben verificar todos los valores de a para los que $a + b = s$.

Si se trata de tres valores, ambas ecuaciones deben coincidir. Identificando los coeficientes, a partir de los de a^2 concluimos que $s = 2$. Y efectivamente, sustituyendo $s = 2$, esta última ecuación coincide con la 1ª del enunciado. Por tanto, la suma pedida es 2.

Pero cada una de esas ecuaciones tiene tres soluciones, una real y dos complejas conjugadas. Para cada solución de la primera, lógicamente, solo una de la segunda suma con ella dos. Necesariamente ha de corresponderse la solución real de una con la de la otra, y las complejas entre si. Sumadas de otra forma no darían 2, pero como el enunciado nos habla de valores reales, la suma es necesariamente 2.

Solución: Ignacio Larrosa Cañestro

Solución 2

Sumando las dos ecuaciones tenemos:

$a^3 + b^3 - 3a^2 -3b^2 + 5a + 5b = 6$

Por otra parte, calculamos:

$(a+b)^3 - 3(a+b)^2 + 5(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2 -6ab -3b^2 + 5a + 5b$

Sustituyendo la primera ecuación:

$(a+b)^3 - 3(a+b)^2 + 5(a+b) = 6 + 3ab\,(a+b-2)$

Bueno, si el problema tiene que tener solución no debería depender de ab, para que desaparezca tendría que ser $a+b=2$ y efectivamente probando vemos que verifica la ecuación!!

Solución: Santiago Agustín Cárdenas Martín

Problema 2

Alfred, Bertha y Cedric están retornando a su pueblo el cual esta a una distancia de 62 kilómetros. Ellos tienen una motocicleta que acomoda a dos personas y puede ir a una velocidad máxima de 50 Km/hr. Cada una de las personas puede caminar a una velocidad máxima de 5 Km/hr. ¿Es posible que las tres cubran la distancia de los 62 kilómetros en tres horas?

Propuesto adaptado y traducido por Aldo Gil C.

Solución

Dos montan en la moto, el otro comienza a andar, durante un poco más de una hora, hasta que la moto llega a 9 Km., del pueblo. Esto son exactamente 50+3 Km. ⇒1 hora, 3 minutos y 36 segundos. En este tiempo el que anda recorre 5,3 Km. Lo dejamos seguir andando mientras el motorista vuelve a por él. En el tiempo que le queda (1 hora, 56 minutos, 24 segundos), el tercer hombre llega a la ciudad (tarda 1h,48min).

Un hombre andando a 5 Km/h y un motorista a 50 Km/h, separados por 53-5,3 = 47,7 Km., se encuentran en T = 47,7 / 55 = 52 minutos y 2 segundos, y lo hacen en este caso a 5,3 + 5*(52min,2seg) = 9,64 Km., del punto de partida. El tiempo restante es 3 h - (1h,3min,36seg + 52min,2seg) = 1h,4min,22seg. En ese tiempo la moto debe recorrer 62 - 9,64 = 52,36 Km.

Como va a 50 Km/h, en el tiempo del que dispone recorre 50*(1h,4min,22seg) = 53,64 Km. ¡Lo consiguen!

En resumen: la moto avanza con dos de ellos durante 53 Km., mientras el que va a pie comienza a caminar. La moto entonces apea al paquete, que va andando hasta el pueblo, y vuelve a por el rezagado. Se encuentran a 9,64 Km., y salen zumbando hacia el pueblo, al que llegan a las 2 horas, 58 minutos y 32 segundos.

El resultado se puede mejorar llevando el proceso al límite de los 10 Km., de distancia al pueblo en el primer viaje de la moto.

Solución: José Ramón Brox

Solución 2

Este es un problema de los que podemos resolver los legos utilizando mates básicas.

Si x es el tiempo que, p.e. Alfred, va en moto, e y el que va andando, se tiene que dar que:

$50x + 5y = 62$ (distancia total)

$x + y = 180$ (tiempo máximo)

x= 62,4 minutos en moto (52,5 Km) e y= 117,6 minutos andando, por lo que llega en 3 horas.

En el Km., 52,5 Bertha vuelve a por Cedric (que ha recorrido 5,25 Km., a pie y dista, por lo tanto, 47,25 Km.) Se encontrarán en un tiempo x en el que Cedric habrá recorrido y Km., y B 47,25-y Km.:

$5x = y$

$50x = 47{,}25-y$

x=51,6 minutos, e y=4,3 Km., por lo que se encuentran en el Km. 9,55.

Les quedan 52,45 Km., que recorren en 62,94 minutos, que sumados a los anteriores hacen 176,94.

Solución: Enrique Fernández Murcia (España)

Solución 3

Para dar una respuesta exacta, supongamos que *A* y *B* salen en moto recorriendo un trayecto "*y*", *B* se baja y recorre un trayecto "*x*" a pie, *A* vuelve para recoger a *C* encontrándolo a una distancia "*x*" del inicio, y juntos recorren en moto el trayecto "*y*", llegando junto con *B* a la meta.

Resumiendo:

A: recorre *y*, *y-x* hasta buscar a C e *y* hasta la meta.

B: recorre *y* en moto y *x* a pie.

C: recorre *x* a pie e *y* en moto.

Si la relación de velocidades entre moto y pie es "a", tenemos: $x.\ a = 2.y - x$

Pues tiene que tardar lo mismo *B* en recorrer "*x*" a pie, que *A* en volver a buscar a *C* (*y-x*) y volver juntos a la meta (*y*), todo esto en moto.

$$x = \frac{2y}{a+1}$$

O si queremos expresar *x* en función del trayecto total $t=x+y$: $x = \frac{2t}{a+3}$.

Para el caso particular t=62km y a=10: $x = \frac{2.62}{10+3} = \frac{124}{13}$ más o menos 9,538 Km.

Tiempo total = (62 - 124/13) / 50 + 124 / 13 / 5 más o menos 2hs 57' 24,92"

Solución: Daniel Ricardo Suárez

Nota.- También resuelto por Maribel, y Federico Pousa

Vale también el comentario de Oscar de Baires

La demostración está muy clara y contesta la pregunta, por lo cual no está mal que obligues a Alfred a usar las 3 horas, mientras sus compañeros llegan 3 minutos antes.

Pero sabemos que queda flotando otra en el aire: ¿Cual seria el tiempo óptimo y el uso de la moto por cada uno?

Todos intuimos que la solución ideal y bonita, es con los 3 llegando al unísono.

De hecho si cuando Bertha llega con Cedric a los 176,94 minutos, podría ser un poco "gamba" y pegarse una vuelta con la moto a buscar al caminante Alfred. Y ya bajaríamos un par de minutos las 3 horas.

Comentario personal: La pucha que si es polémico el problemita

Problema 3

ABC es un número de 3 dígitos en base 10. *A, B,* y *C* son positivos, y sabemos que $(AB-C)/(B-C)=0$. ¿Cuantos números de 3 dígitos existen?

Solución

El primer problema. *ABC* es el número de tres cifras. Como podemos definir la fracción $(AB-C)/(B-C)$, necesariamente $B\neq C$. Entonces, buscamos los números tales que $AB=C$, y $B=C$, es decir, $AB=C$, $A\neq 1$, siempre teniendo en cuenta que *A, B* y *C* son cifras. En conclusión, dichos números son: 212, 224, 236, 248, 313, 326, 339, 414, 428, 515, 616, 717, 818 y 919.

Solución: Alberto Castaño Domínguez

Problema 4

Resolver la ecuación: $(x^2-3x+1)^2-3(x^2-3x+1)+1 = x$.

Fuente: Propuesto por Aldo Gil

Solución

Sea $f(x)=x^2-3x+1$. Queremos averiguar las soluciones de $f(f(x))=x$. Como f es un polinomio, existe al menos un x_0 tal que $f(x_0)=x_0$, luego $f(f(x_0))=x_0$, por lo que sería solución.

Esos x_0 son las soluciones de $f(x)-x=0$, es decir, $x^2-4x+1=0$. Tiene dos soluciones, que son $2+\sqrt{3}$ y $2-\sqrt{3}$.

La ecuación $f(f(x))=x$ es $x^4-6x^3+8x^2+2x-1=(x^2-4x+1)(x^2-2x-1)=0$, cosa que era de esperar, por ser $2+\sqrt{3}$ y $2-\sqrt{3}$, soluciones de $f(x)=x$. Por lo tanto, las demás soluciones son las de x^2-2x-1, que son $1+\sqrt{2}$ y $1-\sqrt{2}$.

Recapitulando, que es gerundio: las soluciones son $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$, $1+\sqrt{2}$ y $1-\sqrt{2}$.

Solución: Alberto Castaño Domínguez

Problema 5

Resolver la siguiente ecuación en enteros positivos: $x^3-y^3=xy+61$

Fuente: XLV Lithuanian Mathematical Olympiad 1996

Solución

Manipulando la ecuación tenemos:

$(x-y)(x^2+xy+yz)-xy = 61$

$y(x-y)((x-y)^2+3yx)-xy=61$

Como artificio hacemos $x-y=a$, y obviamente $a>0$. $x.y=b$. Notar que $b>0$.

Reescribiendo la ecuación en términos de a y b tenemos: $a^3+b(3a-1)=61$

Donde $a,b>0$. Como $a^3>61$, luego $a=1$, 2 ó 3.

También: $b=\dfrac{61-a^3}{3a-1}$, perteneciente a los enteros, tanteando tenemos:

$a=1$ nos da $b= 30$

$a=2$ nos da $b= 53/5$

$a=3$ nos da $b= 17/4$

Es fácil pues reemplazando: $x-y=1$, y $x.y=30$, obtenemos los valores $x=6$ y $y=5$, como única solución.

Solución: Aparecida en Crux Mathematicorum – Canadá, traducida y adaptada por Aldo Gil C.

Problema 6

Un hombre siempre viaja en su automóvil a velocidad constante. Los puntos A,B,C,D son tales que $BC=CD=10$ kilómetros, y el ángulo $BCD = \pi/2$. El punto A esta dentro del ángulo BCD. Si viaja directamente de A a C lo hace en 30 minutos, de A a C vía B en 35 minutos, y A a C vía D en 40 minutos. ¿A que velocidad constante viaja el hombre?

Fuente:Ontario Sección S – Problema 78-6 by J. Levvit

Solución

El ángulo mide 90°, entonces

10+ab=7/6 ac

10+ad=8/6 ac

A la vez hay que encontrar los ángulos $\angle BCA$ y $\angle DCA$ que sumados den 90°.

A través del método de resolución de triángulos, vemos que el punto A no puede estar dentro del triángulo BCD y obtenemos que las única posibilidad son AB=12.68 Km. AC=19.44 Km. y AD=15.92 Km.

A su vez el ángulo $\angle BCA$ mide 35.3° y el $\angle$DCA mide 54.7°

Entonces si tarda 30 minutos en recorrer 19.44 Km., va a una velocidad de 38.88 Km. por hora ó sea 648 metros por minutos, comprobamos y vemos que para recorrer AB+10=22.68 Km., tarda 35 minutos y para recorrer AD+10 =25.92 tarda 40 minutos.

Solución:Pablo Adrian Sussi

Problema 7

Uno de mis problemas favoritos de "viajes" es el que sigue, no encuentro de donde lo saqué.

Dos vehículos están recorriendo el trayecto Buenos Aires-Mar del Plata y otros dos hacen el recorrido inverso.

A las 12hs, uno de los que vienen de Buenos Aires sobrepasa a su compañero

A las 14hs, se cruza con uno de Mar del Plata, a las 15hs, se cruza con el otro.

A las 17hs, uno de los que vienen de Mar del Plata se cruza con uno de Buenos Aires,

A las 18hs, sobrepasa a su compañero.

Todos van a velocidad constante.

¿Cuándo se produce el cruce que falta?

¿Qué se puede decir de las velocidades de los cuatro vehículos?

Propuesto por: Daniel Ricardo Suárez

Solución

Llamemos A y B a los que van para Mar del Plata y C, D los que vienen. B sobrepasa a A a las 12, a las 14 se encuentran B y C, a las 15 se encuentran B y D, a las 18 horas D alcanza a C, y a las 17, se encuentran D y A, ya que D todavía no alcanzó a C, el encuentro de A y C debe haber ocurrido antes de las 17.

Veamos, que a las 12 A y B estaban en el mismo punto, pero se encuentran con D, uno a las 15 y otro a las 17; entonces tenemos

(A+D)*5=(A+B)*3

De acá deducimos B=(5A+2D)/3 A=(3B-2D)/5 D=(3B-5A)/2

Sumamos B+D=(10A+4D+9B-10A)/6

6B+6D=4D+9B

2D=3B

D=1.5B

De igual modo 2A=D y 3A=B

Desde que B se encuentra con C (a las 14), hasta que se encuentra con D, pasa 1 hora, por lo tanto D llega al punto de encuentro de B y C una hora y media después de encontrarse con B, o sea a las 16.30 horas.

D alcanza a C a las 18, o sea C tardó 4 horas y D tardó 1.5 horas en recorrer el mismo trayecto, desde el punto de encuentro B y C hasta el punto de encuentro de C y D. De acá deducimos que la velocidad de C es una cuarta parte de la de B, o sea 4C=B.

Ya tenemos todas las velocidades, lo que B hace en una hora D lo hace en 1.5, A en 3 y C en 4.

Ahora ya podemos calcular la hora de encuentro de ACB tardó 2 horas en ir del encuentro con A al encuentro con B, en ese lapso A sólo recorrió1/3 parte, por lo tanto a las 14 horas A estaba a 4 horas (a su velocidad) de llegar al punto de encuentro de B y C, lo que traducido es 4/3 de hora a la velocidad de B. Esa es la distancia que separa a A de C a las 14 horas.

A avanza a 1/3 de hora a velocidad de B, C avanza a 1/4 de hora a velocidad de B. Juntos 1/4+1/3=7/12 de velocidad de B. Si tienen que recorrer 4/3 lo hacen en (4/3)(7/12)=48/21=2.285714 horas = 2horas 17.142857minutos= 2horas 17minutos 8.57 segundos, o sea se encuentran a las 16 horas 17 minutos y 8,57 segundos.

Solución: Pablo Adrián Sussi

Problema 8

Dentro de unos días se celebra el festival de Eurovisión, concurso al que una cadena de televisión por cada país europeo presenta una canción. La primera parte del concurso es la interpretación de las canciones: en la segunda, los países participantes votan por turno, distribuyendo puntos según (en teoría) la calidad de las distintas canciones interpretadas. En cada turno, se calcula una clasificación provisional.

El problema que propongo correspondería a un festival de Eurovisión en formato reducido, concursando sólo España, Inglaterra, Francia, Alemania e Italia.

Cada país debe votar a los restantes (no a sí mismo), repartiendo sus puntos en la forma 5, 3, 2, 1.

Así España que empieza la ronda de votaciones, asigna 5 votos a Alemania, 3 a Italia, 2 a Inglaterra y 1 a Francia.

Después votan los demás países, en el orden Francia, Inglaterra, Italia, Alemania.

En los dos primeros turnos de votación (votos de España y Francia), Alemania va en cabeza. Pero en cada uno de los tres siguientes hay cambio de líder de la clasificación provisional, pasando a la cabeza de la tabla un país que antes no había ocupado este lugar.

Por cierto, en ninguno de los turnos se da en la clasificación un empate a puntos entre países.

La pregunta es ¿cuál fue el reparto de puntos en cada ronda?

Propuesto por: Jesús Sanz

Solución

España: 5 Alemania, 3 Italia, 2 Inglaterra 1 Francia

Francia: 5 España, 3 Italia, 2 Alemania, 1 Inglaterra.

Posiciones 2° ronda Alemania 7, Italia 6, España 5, Inglaterra 3, Francia 1

Inglaterra: 5 Francia, 3 Italia, 2 España, 1 Alemania

Posiciones: Italia 9, Alemania 8, España 7, Francia 6, Inglaterra 3

Italia: 5 Francia, 3 Inglaterra, 2 Alemania y 1 España

Posiciones: Francia 11, Alemania 10, Italia 9, España 8, Inglaterra 6

Alemania: España 5, Inglaterra 3, Italia 2, Francia 1

Posiciones: España 13, Francia 12, Italia 11, Alemania 10 Inglaterra 9.

Solución: Pablo Adrián Sussi

Problema 9

Sea *ABC* un triángulo equilátero de lado 1, *D* un punto en *BC*, y sean r_1, r_2 los inradios de los triángulos *ABD, ADC*, respectivamente. Expresar $r_1 r_2$ en términos de $p=BD$, y encontrar el máximo valor de $r_1 r_2$.

Fuente: 8º Olimpiada Corea 1998-1999

Solución

Por la ley de cosenos aplicada al triángulo ABD, $\overline{AD}^2 = 12 + p^2 - 2.1.p.\cos 60^o$, de aquí: $\overline{AD} = \sqrt{p^2 - p + 1}$

El área de *ABD* puede ser expresado como $\frac{1}{2}.1.p.\cos 60^o = \frac{p\sqrt{3}}{4}$, y también como $\frac{1+p+\sqrt{p^2-p+1)}}{2}.r_1$. Resolviendo estas ecuaciones para r_1, tenemos:

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}(1+p-\sqrt{p^2-p+1})}{6}$$

, de la misma manera encontramos que el circunradio r_2 del triángulo ADC satisface:

$$r_2 = \frac{\sqrt{3}(2-p-\sqrt{p^2-p+1})}{6}$$

En consecuencia:

$$r_1.r_2 = \frac{1-\sqrt{p^2-p+1)}}{4} = \frac{1-\sqrt{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}{4}$$

Maximizar $\frac{1-\sqrt{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}}{4}$, es equivalente a minimizar $(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$, y esto sucede cuando $(p-\frac{1}{2})^2$ es cero, esto es $P=\frac{1}{2}$, luego $r_1 r_2 = \frac{2-\sqrt{3}}{8}$

Solución: Pierre Bornsztein de Francia- Traducido y adaptado por Aldo Gil C.

Problema 10

Este es cortito, pero con una solución ingeniosa.

Tengo el siguiente problema: Transformar la suma en producto: $1+sen(2x)$.

Solución

Aquí hay una solución: Podemos hacer $1=sen\ 90º$.

De aquí: $sen(90)+sen(2x) = 2*sen(45+x)*cos(45-x)$.

Fuente: Diego Alex de la lista de la Olimpiada Matemática Brasilera – Traducido y adaptado por Aldo Gil C.

Una fórmula muy útil:

La siguiente es una poco conocida fórmula para el área de un cuadrilátero.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero, con lados $a=AB$, $b=BC, c=CD$, y $d=DA$. Sea K el área y s el semiperímetro $(a+b+c+d)/2$. Sea A el ángulo en el vértice A. Entonces:

$$\boxed{K^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right).}$$

Comprobación:

Derivamos la fórmula como sigue:

Por la ley de cosenos: $BD^2=a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2-2bc\cos C$.

Por consiguiente: $a^2-b^2-c^2+d^2=2ad\cos A - 2bc\cos C$

Implica que: $(a^2-b^2-c^2+d^2)^2=4a^2d^2\ \cos^2A-8abcd\cos A\cos C+4b^2c^2\cos^2C$.

Ahora, el área ΔABD es $\frac{1}{2}ad\ sen\ A$, y el área ΔBCD es $\frac{1}{2}bc\ sen\ C$. Asi:

$$K= \frac{1}{2}ad\ sen\ A+\frac{1}{2}bc\ sen\ C$$

Por consiguiente:

$$16K^2 = 4a^2d^2 sen\ A+8abcd\ senA\ senC + 4b^2c^2\ sen^2C$$

$$= 4a^2d^2\ sen2A + 8abcd\ sen\ A\ sen\ C + 4b^2c^2\ sen^2\ C + 4a^2d^2\ cos2A-8abcd\cos A\cos C + 4b^2c^2\cos^2C - (a^2-b^2-c^2+d^2)^2$$

$$= 4a^2d^2+8abcd+4b^2c^2-8abcd(\cos(A+C)+1)-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2-16abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

$$= (a^2+2ad+d^2-b^2+2bc-c^2)(b^2+2bc+c^2-a^2+2ad-d^2)-16abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

$$= ((a+d)^2-(b-c)^2)((b+c)^2-(a-d)^2)-16abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

$$= (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)- 16abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

$$= (2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d)- 16abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)$$

Consecuentemente:

$$K^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)-abcd\cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right).$$

Un inmediato e importante corolario es la fórmula de Bramagupta, en el caso que el cuadrilátero sea cíclico (inscriptible), entonces $A+C=180º$, luego:

$$K^2=(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

Ahora debes poder resolver el siguiente problema rápidamente, aparecido en Competition Descartes 1993

Suponiendo que p,q,r,s son números reales tales que el cuadrilátero se puede formar con lados p,q,r,s en sentido horario. Probar que los vértices del cuadrilátero de máxima área están en el círculo.

Extraído de: Mathematicacomrum – 2000

Traducido y adaptado por Aldo Gil C.

Amigos:

Con mucha paciencia estamos finalizando el número 8 de nuestra colección de …n números (o hasta que el moderador lo permita).

Me estoy poniendo un poquito coloquial, me parece más agradable y en fin … me gusta.

Yo soy escritor de novelitas también; es por eso que me gusta el rollo del bueno.

Que barbaridad de información hay por allí escondida, trataré de descubrirla, pero les digo que he impreso una cantidad bastante grande (en idioma no castellano), y ando medio loco traduciendo, y a veces cuando acabo de traducir me doy cuenta que el problema no era tan bonito (para mi gusto) y lo deshecho, la idea tampoco es rellenarlos de información poco agradable, creo que estoy poniendo cosas agradables... y si no es así me avisan

Hasta La próxima, Aldo Gil