Problema 1

Los números enteros del 1 al 2002, ambos inclusive, se escriben en una pizarra en orden creciente 1, 2, . . . , 2001, 2002. Luego, se borran los que ocupan el primer lugar, cuarto lugar, séptimo lugar, etc., es decir, los que ocupan los lugares de la forma $3k + 1$. En la nueva lista se borran los números que están en los lugares de la forma $3k + 1$. Se repite este proceso hasta que se borran todos los números de la lista.

¿Cuál fue el último número que se borró?

Solución

Si los números que se borran responden a la forma $3k + 1$, vemos que son todos los números posteriores a los múltiplos de tres. Por lo tanto, debemos buscar el último número escrito que sea múltiplo de tres y cuyo posterior también aparezca en la lista. El último que aparece es 2001 (2001/3 = 667) y efectivamente su posterior (2002) también aparece, por lo que podríamos decir que el último número a borrar sería 2002.

Solución: Alcho

Problema 2

Un granjero descubre que si cuenta sus ovejas de 2 en 2, le sobra 1. Lo mismo pasa cuando las cuenta de 3 en 3, de 4 en 4 etc... hasta de 10 en 10. ¿Cuál es el número más pequeño posible de ovejas que tiene el granjero?

Propuesto por: Justina Marimba - 2001

Solución

Sea n el número de ovejas. De acuerdo a la manera de contar del granjero, n es de la forma $2a+1, 3b+1, 4c+1, \ldots, 9i+1$ y $10j+1$. Así que tenemos:

$n = 2a+1 = 3b+1 = 4c+1 = \ldots = 9i+1 = 10j+1$

$n-1 = 2a = 3b = 4c = \ldots = 9i = 10j$

Tenemos entonces que 2, 3, 4, ..., 9, 10 dividen a (n-1). El menor número que cumple con estas expectativas es: 2*2*2*3*3*5*7. No podemos quitar algún factor porque al menos un número del 2 al 10 no dividirá a (n-1). Al mismo tiempo tenemos que este número tiene los factores requeridos. Por lo tanto n = 2*2*2*3*3*5*7+1 = 2521

Problema 3

¿Cuántas veces aparece el dígito 9 en la lista de los números 1, 2, 3, . . . , 1998 ?

Solución

Si hacemos una lista de los números 000, 001, ..., 999, uno sobre el otro (escribiendo también los ceros a la izquierda), obtenemos 3 columnas con 1000 dígitos en cada columna. Notamos que cada uno de los 10 dígitos 0,...,9 aparece en igual proporción en cada columna, así que 9 aparece 3000/10 = 300 veces en la lista. Del 1000 al 1999 es el mismo razonamiento para las 3 posiciones de la derecha, y en 1999 aparece 3 veces. Conclusión: el dígito 9 aparece 300 + (300-3) = 597 veces.

Problema 4

Resolver la ecuación en ***R*** (conjunto de los números reales):

$\log_{16}x + \log_x 2 = 5/4$

Fuente: Archivos Terra

Solución

Sabiendo: que: $\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$, podremos escribir para $\log_{16}x$:

$\log_{16}x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 16} = \dfrac{\log_2 x}{4}$, una vez que $\log_2 16 = 4$, pues $2^4 = 16$.

Substituyendo en la expresión original tenemos: $\dfrac{\log_x 2 + \log_2 x}{4} = \dfrac{5}{4}$

Multiplicando ambos miembros por 4, (para eliminar el denominador 4), queda: $4.\log_x 2 + \log_2 x = 5$. Sabiendo que: $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, entenderemos fácilmente que: $\log_x 2 = \dfrac{1}{\log_2 x}$,Substituyendo nuevamente, $\dfrac{4}{\log_2 x} + \log_2 x = 5$

Haciendo $\log_2 x = y$ (un cambio transitorio de variable), tendremos: $\dfrac{4}{y} + y = 5$

Suponiendo $y \neq 0$, podremos multiplicar ambos miembros de la igualdad por y, para eliminar el denominador y tendremos entonces:

$4 + y^2 = 5y$, y pasando $5y$ para el primer miembro: $y^2 - 5y + 4 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado encontraremos: $y = 4$ ó $y = 1$

Como $y = \log_2 x$ (debido al cambio de variable) por lo tanto: $\log_2 x = 4$ ó $\log_2 x = 1$

De ahí por definición de logaritmo, concluimos inevitablemente que:

$x = 2^4$ ó $x = 2^1$ $\therefore$ $x = 16$ ó $x = 2$.

Luego el conjunto solución es = {2;16}.

Solución: Recopilada y traducida por Aldo Gil

Problema 5

El valor de $(tg10^o + cotg10^o).sen20^o$ es:

Fuente: Exercícios Resolvidos III - FUVEST 94 - 1ª fase – Problema 2 (Brasil)

Solución

Substituyendo la tangente y la cotangente en función de seno y coseno, vemos:

$$\frac{sen\ 10^o}{cos\ 10^o}+\frac{cos\ 10^o}{sen\ 10^o}.(2sen\ 10^o.cos\ 10^o) = 2$$

Recordando que $sen\ 2x = 2.senx.cosx$ y por esto $sen\ 20^o = 2.sen10^o.cos10^o$

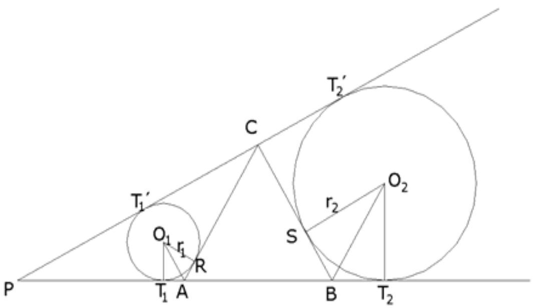
Solución: Brasilera (traducida por Aldo Gil)

Problema 6

Sea *ABC* un triángulo equilátero de lado *a*. En la prolongación de *AB* se toma un punto *P* tal que *A* este entre *P* y *B*. Sean r_1 el radio del incírculo de *PAC* y r_2 el exradio de *PBC*, con respecto a *BC*. Hallar *a* en función de r_1 y r_2

Fuente: 16º Olimpiada Austria 1993

Solución



Mirando la figura tenemos que $\angle T_1O_1R=60^o$. De aquí: $\angle AO_1R=30^o$. En forma similar $\angle BO_2S=30^o$.

$T_1T_2= T_1A+AB+BT_2=RA+AB+SB$

(Propiedades de tangentes a un círculo).

$= r_1tan\ 30^o+a+r_2\ tan\ 30^o$

$= \frac{r_1+r_2}{\sqrt{3}}+a$, y $T'T'_2=T'_1C+CT'_2=CR+CS=(a-RA)+(a-SB)=2a - \frac{r_1+r_2}{\sqrt{3}}$

Las tangentes comunes a los dos círculos son iguales por lo tanto : $T_1T_2=T'_1T'_2$

De aquí: $\frac{r_1+r_2}{\sqrt{3}}+a=2a-\frac{r_1+r_2}{\sqrt{3}}$, efectuando podemos encontrar que: $r_1+r_2=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Solución: Adaptada y traducida por Aldo Gil

Problema 7

Tres hermanos están reunidos festejando el cumpleaños de uno de ellos.
Se dan cuenta que sus edades en años son tres números primos distintos.
Esto ha ocurrido once veces en el transcurso de sus vidas.
Ninguno tiene más de 100 años.
¿Cuántos años cumplía el homenajeado, cuando esto ocurrió por primera vez?
Otras preguntas:
¿Cuántos años le lleva el menor al del medio?
¿Cuántos años tiene el mayor?

Solución

Aquí hay truco o el enunciado es incorrecto. El mejor resultado posible es para 10 veces, con las edades del más pequeño iguales a: 7, 11, 13, 17, 23, 31, 37, 41, 53, 67 con diferencias de 6 entre el del medio y el menor y 24 entre el mayor y el del medio.
ó 5, 7, 11, 17, 23, 31, 37, 47, 53, 61 con diferencias de 6 entre el del medio y el menor y 30 entre el mayor y el del medio.
Si consideramos, incorrectamente, que 1 es un número primo, a ambas soluciones le podríamos añadir el 1. Pero 1 no es primo.
Pero no, tiene truco ... Cuando el pequeño cumplió 2 (único primo par) años, los otros aún tenían 7 y 31, o bien 7 y 37.
Esa fue la primera vez que sus edades eran todas primas. Las siguientes veces tiene que ser cuando cumpla el último en hacerlo de los dos mayores y antes de que lo haga el pequeño.
Entonces, el cumpleaños que celebran no puede ser el del menor, pero creo que podría ser cualquiera de los otros dos. A no ser que el enunciado se refiere al homenajeado en aquel momento, cuando las tres edades fueron primas la primera vez, y no al homenajeado en el cumpleaños actual. En ese caso, la primera respuesta sería 2.
En cualquier caso, el mayor tiene 97 y el menor le lleva -6 ":^) al del medio una parte del año, mientras en el resto le lleva - 5 ...

Solución: Ignacio Larrosa Cañestro

Problema 8

Realiza las operaciones necesarias para llegar al resultado de la derecha

$$\frac{5^{n+1}-1}{4}+5^{n+1}=\frac{5^{n+2}}{4}$$

Propuesto por: Antonela

Solución

Tomaremos el lado izquierdo:

$$\frac{5^{n+1}-1}{4}+5^{n+1}=\frac{5^{n+1}+4.5^{n+1}-1}{4}=\frac{5.5^{n+1}-1}{4}=\frac{5^{n+2}-1}{4}$$

Solución: José Ramón Brox

Problema 9

Resolver la ecuación: $(x^2-3x+1)^2-3(x^2-3x+1)+1 = x.$

Propuesto por Jimmy Chui – Universidad de Toronto - 1996

Solución

Desarrollando y simplificando tenemos: $x^4-6x^3+8x^2+2x-1=0$...............(I).

Factorizamos el lado izquierdo de la forma:

$(x^2+ax+1)(x^2+bx-1)=x^4+(a+b)x^3+abx^2+(b-a)x-$..................................(II)

Igualando (I) y (II): $a+b=-6$

$ab=8$

$b-a=2$.

La primera y la tercera ecuación resueltas nos dan los valores $a=-4$ y $b=-2$, valores que verifican la segunda ecuación $ab=8$. Luego la ecuación queda formada así:

$$(x^2-4x+1)(x^2-2x-1)=0.$$

Resolviendo tenemos: $x=2\pm\sqrt{3}$ y $x = 1\pm\sqrt{2}$

Otra solución es añadiendo x^2-3x+1 a ambos lados, y efectuando. (Queda para el lector)

Resuelto por: Jimmy Chui, traducido y adaptado por Aldo Gil

Problema 10

Aquí tienen el siguiente "problema", sacado de un libro de Ingreso a la UTN.

Fui a buscar trabajo y en un acto de soberbia al que creí que iba a ser mi jefe le dije que pretendía ganar $120.000 por año.

En seguida me di cuenta de que el señor no tenía ni la más mínima intención de emplearme porque me contestó:

"Vea joven, un año tiene 365 días pero Ud. duerme 8 horas por día, en total 122 días. Luego quedan 243 días laborables. Ud. descansa 8 horas por días, en total otros 122 días, luego quedan 121. Ud. no trabaja en los 52 domingos del año, por lo que quedan 69 días. Como los sábados trabaja medio día, por 52 sábados no trabajará 26 días, luego quedan 43. Todos los días tiene una hora libre para almorzar, lo que hacen 15 días en el año, por lo tanto quedan 28 días. Este año le corresponden 2 semanas de licencia, el 1 de mayo, el 25 de mayo, el 9 de Julio y el 25 de diciembre, en total 18 días, quedan así solamente 10 días. ¿No le parece una exageración pedir $120.000 por 10 días de trabajo?". ¿Tenía razón el jefe? ¿Por qué?

Propuesto por: Problema del empleado by Oscar Canedo Donaire -Snark-Enero 1998

Solución

Muy listo el jefe pero no tiene razón ya que, por ejemplo, cuando descuenta el domingo lo descuenta 100% y previamente ya había descontado 16 horas (8 de dormir y 8 de descanso) de cada domingo.

Solución: Alex Arbulu

Curiosidad:

Dicen que: $\pi=128\tan^{-1}\left(\frac{1}{40}\right)-4\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)-16\tan^{-1}\left(\frac{1}{515}\right)-32\tan^{-1}\left(\frac{1}{4030}\right)-64\tan^{-1}\left(\frac{1}{32060}\right)$

¿Será cierto esto? Comprobarlo

Amigos:

Ya casi se me esta dando por escribir una revista y toda esa cuestión, poniendo cosas diferentes, pero bueno la idea es que les agrade este fascículo.

Hasta la próxima......

Mayo 2006, mes de mi cumpleaños