

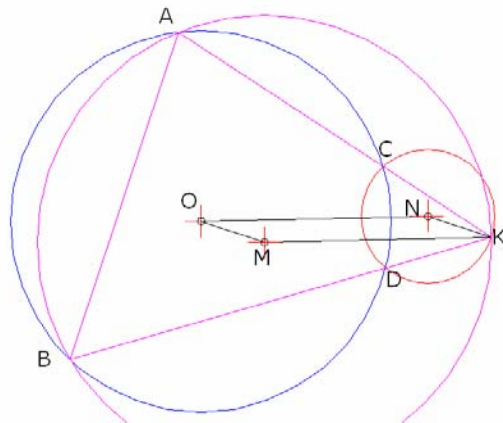
En este número 50 si venimos a todo trapo, trayendo lo mejor que haya podido encontrar en la red, y con el mayor entusiasmo de que realmente sea bueno, creo que lo merece. Primero al autor por el esfuerzo puesto en el asunto, y segundo en ustedes que con su entusiasmo, y buenos deseos (poca colaboración eso si..., no se me enojen), han provocado que este engendro llegue al número 50. Así que la culpa no es solo mía.

Vamos pues arrancando con Geometría (cuando no.....)

Gracias a ustedes por la paciencia.

Problema 1

Arrancamos con uno aparecido en una prueba de preparación alemana, donde los solucionadores (sic..), dieron dos soluciones a cual mas bella pero de muy alto nivel la primera y de mucha astucia la segunda. Pongo las dos porque me parecen formativas y proclives a la investigación, la verdad que la solución me encanta pero me quedo un poquito cortín con la forma, es muy buena la verdad.

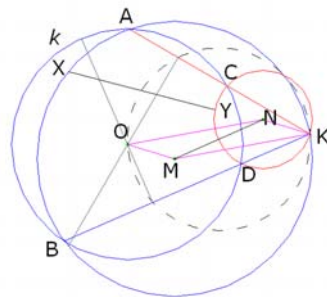


Las cuerdas AC y BD de un círculo k se cortan en K, y sea O el centro del círculo. Sean M y N los circuncentros de los triángulos AKB y CKD. Demostrar que el cuadrilátero OMKN es un paralelogramo.

Fuente: German TST 2004, exam VII, problem 2, by Arthur Engel; part of AMM problem #10874

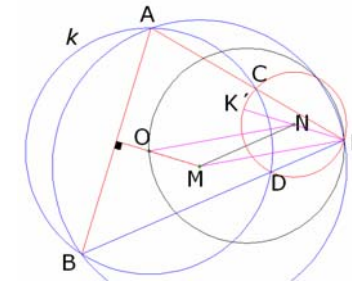
Solución 1

Es bien conocido que si construimos una línea que pasa por K la cual corta a los círculos AKB y CKD en X, Y respectivamente, entonces la ubicación del punto medio de XY es un círculo w centrado en el punto medio de MN y pasa por K. Tenemos que demostrar que los puntos medios de KO y MN coinciden. Las líneas AC y BD cortan a w en sus puntos medios. Consideramos las perpendiculares a estas dos líneas que pasan por sus puntos medios. Ellas por ser mediatrices de k, se interceptan en O y en un punto en w diametralmente opuesto a K.



Esto sugiere que el centro de w, el cual es el punto medio de MN, es asimismo el punto medio de KO, y ya lo tenemos hecho.

Solución 2



Diremos que todos los tipos de ángulos, son modulo 180°.

Los puntos O y M, que son los circuncentros de los triángulos CAB y KAB, están en la mediatriz del segmento AB, así tenemos que OM es perpendicular a AB.

Si K' es la reflexión de K en N, entonces KK' es un diámetro del circuncírculo del triángulo CDK. De aquí, $\angle KCK' = 90^\circ$. Pero la suma de los ángulos del triángulo KCK' es $\angle K'KC + \angle KCK' + \angle CK'K = 0^\circ$.

Por estar subtendidos por la misma cuerda, $\angle CK'K = \angle CDK$, de aquí, $\angle CK'K = \angle CAB$ (de nuevo por cuerdas subtendidas). Más aún, tenemos $\angle KCK' = 90^\circ$, como se ha dicho anteriormente. De aquí: $\angle K'KC + 90^\circ + \angle CAB = 0^\circ$ para que:

$\angle(KN; AB) = \angle(KN; AC) + \angle(AC; AB) = \angle K'KC + \angle CAB$
 $= \angle K'KC + 90^\circ + \angle CAB - 90^\circ = 0^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

(Recuerda que los ángulos son directamente modulo 180). De aquí KN es perpendicular a AB. Junto con OM perpendicular a AB, esto nos da $KN \parallel OM$. En forma similar, $KM \parallel ON$; por lo tanto, OMKN es un paralelogramo.

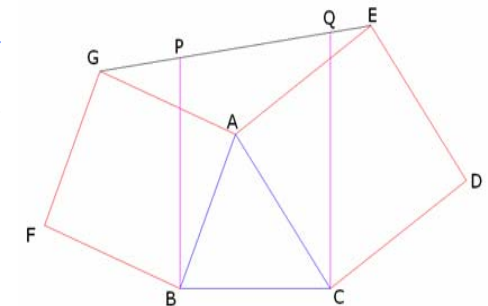
Solución: Darij de Mathlinks, diagramación, adaptación y traducción por Aldo Gil

Problema 2

Este es un problema con propiedades por verificar.

Dos cuadrados ACDE y ABFG son construidos en el exterior del triángulo ABC. Las perpendiculares a BC por B y C cortan a GE en los puntos P y Q. Demostrar que: $BP + CQ \geq BC + GE$.

Fuente: Irán 1998



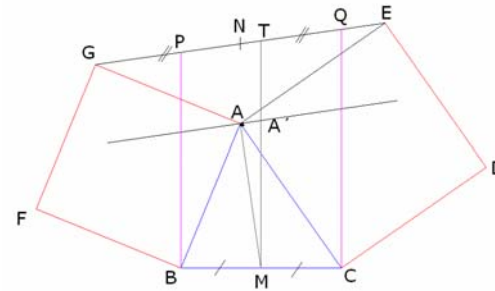
Solución

Hay algunas propiedades de los triángulos ABC y AGE los cuales no voy a demostrar (en realidad no son muy duros).

Primero que todo, la mediana de uno de estos dos triángulos correspondiente al vértice A , es la mitad del lado opuesto de A del otro triángulo. Otra propiedad es que la mediana correspondiente A en uno de ellos es perpendicular al lado opuesto de A en el otro. Sea M el punto medio de BC , N el punto medio de GE , T la intersección de GE y la mediatriz de BC . De acuerdo con la primera propiedad la conclusión es equivalente a $MT \geq AN + AM$. Sea la paralela trazada por A a GE que corta a MT en A' . $AA'TN$ es un paralelogramo porque MT y AN son perpendiculares a BC (de acuerdo con la segunda propiedad). Tenemos: $MT = A'T + A'M = AN + A'M \geq AN + AM$, porque en el triángulo rectángulo $A'MA'$ es la hipotenusa y AM es un cateto, mas corto que $A'M$.

Algo que se me ha olvidado, la igualdad ocurre si $AB=AC$.

Solución: Darij de Mathlinks, diagramación, adaptación y traducción por Aldo Gil



Problema 3

Dado un triángulo ABC cuyos ángulos son menor que 120° , se trazan en forma exterior los triángulos equiláteros AFB , BDC y CEA .

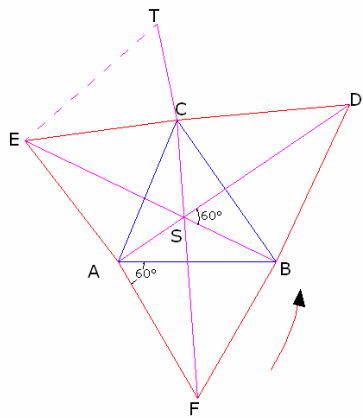
a) Probar que las líneas AD , BE y CF pasan por un punto S .

b) Probar que: $SD+SE+SF=2(SA+SB+SC)$

Fuente: Lista Corta de Problemas 1984-IMO

Solución

Un típico problema bastante sencillo, conceptual y con aplicación directa de rotaciones, una sección que pocas veces utilizamos pero son bastantes útiles en la solución de problemas. Este es un caso didáctico



co y simple de no hacerse problemas con los problemas (valga la redundancia).

a) Una rotación de 60° alrededor de A transforma el triángulo CAF en el triángulo EAB ; tal que: $\angle(CF,EB)=60^\circ$. Una rotación análoga alrededor de C transforma el triángulo EBC en ADC ; esto es. $\angle(EB,AD)=60^\circ$. También una rotación alrededor de B produce $\angle(AD,FC)=60^\circ$. Sea S la intersección de EB y AD . Aquí sabemos que: $\angle CSE = \angle CAE = 60^\circ$, los vértices de $EASC$ están en un círculo. Por lo tanto $\angle(AS,SC) = 60^\circ$, esto es $\angle(AD,SC) = 60^\circ$, y las líneas SC y FC coinciden.

b) Una rotación de $EASC$ de 60° , alrededor de E transforma A en C y S en un punto T donde $SE=ST=SC+CT=SC+SA$. Sumando las igualdades: $SE=SC+SA$, con las igualdades análogas: $SD=SB+SC$ y $SF=SA+SB$, de donde fácil se deduce lo solicitado.

Solución: Respuesta Oficial del jurado, diagramada y traducida por Aldo Gil C.

Problema 4

Sea el triángulo ABC con ortocentro H , y sea P un punto en su circuncírculo. Sea E el pie de la altura BH , sean $PAQB$ y $PARC$ paralelogramos, y AQ que corta HR en X . Probar que EX es paralelo a AP .

Fuente: Lista Corta para la 37C IMO Solución-1997

Solución

Este es un problema de antología, lo encontré en la fuente de la referencia, y pues si se trata de ser didáctico, se ofrece una solución por parte de los autores, bastante corta, y me tome la libertad de diagramarlo en varias figuras, a fin de que sea entendible, ya me parece estar haciendo tratados de

matemática con estas divagaciones, pero en fin se trata de aportar algo, y como no me la pienso pasar solo de traductor, pues aportaré lo que se pueda, disfrútalo con mucha paciencia, es muy bueno.....

Primero demostraremos que los triángulos ABC y AQR tiene el mismo ortocentro H . Sean G y G' , respectivamente, los centroides de los triángulos ABC y PBC . Desde que los dos triángulos comparten los vértices B y C , se deduce que $GG' = \frac{AP}{3}$. (En la figura

2 podemos ver el trazo de las alturas del triángulo PQR , y

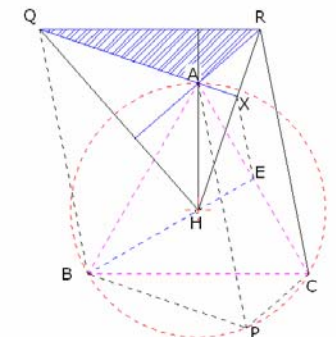


Figura 2

en la figura 3, en forma gráfica la conclusión de la dimensión de GG').

Los dos triángulos también tienen el mismo circuncentro O , usando la conocida relación entre el circuncentro, centroide y ortocentro del triángulo, deducimos que $HH' = AP$ (Ver figura 4). Desde que AQR es obtenido del triángulo PBC por traslación del vector $H'H$, deducimos que el ortocentro del triángulo AQR es H .

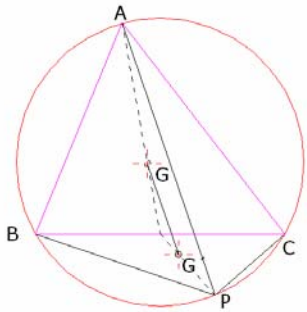


Figura 3

Esto implica que RH es perpendicular a AQ , (ver figura 2) así X es el pie de la altura del triángulo AQR (trazada desde R). Debemos probar que EX es paralelo a AP . Desde que el triángulo AQR trasladado por AP resulta PBC , un problema equivalente es: sea P que pertenece al círculo ABC , con $P \neq A, B, C$; sea E el pie de la altura de B en el triángulo ABC , y sea Y el pie de la altura de C en el triángulo PBC ; demostrar que EY es paralelo a AP , (Esto es equivalente al problema original porque $AP = EX + EY$). Desde que B, C, E y Y son concíclicos, esto a su vez da lo siguiente: ω_1 y ω_2 son círculos que se cortan en B y C ; una línea que pasa por B corta a ω_1 y ω_2 en P y Y respectivamente, y la línea que pasa por C corta a ω_1 y ω_2 en A y E respectivamente; probar que $EY \parallel AP$. Pero esto es inmediato. (Ver figura 5 aclaración final)

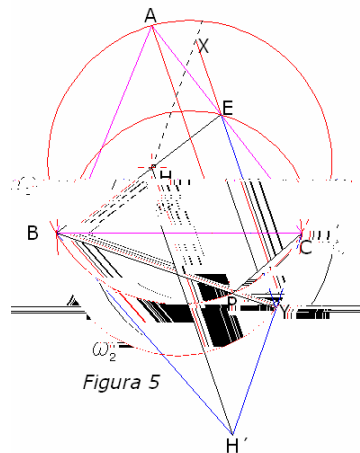


Figura 5

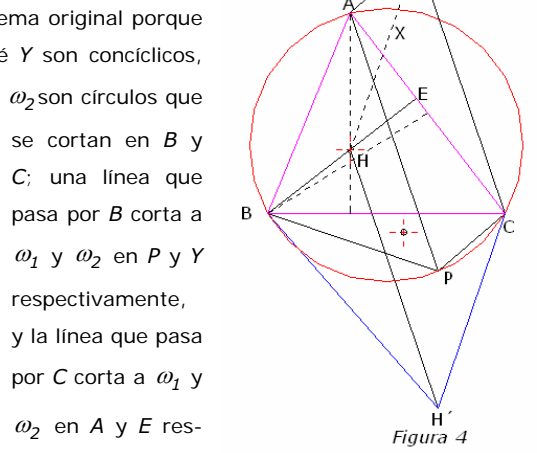


Figura 4

probar que $EY \parallel AP$. Pero esto es inmediato. (Ver figura 5 aclaración final)

Solución: Los autores del asunto, diagramación, adaptación, explicación, interpretación y traducción por Aldo Gil

Problema 5

En un triángulo ABC , el ángulo C es 30° . D es un punto en AC y E es un punto en BC tal que $AD = BE = AB$. Probar que $OI = DE$ y OI es perpendicular a DE , donde O e I son respectivamente el circuncentro y el incentro del triángulo ABC .

Fuente: Primer Test de selección para la IMO China – 1998

Solución

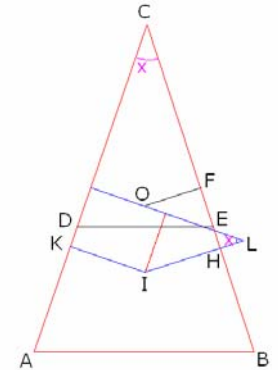
Vamos a generalizar el problema considerando un triángulo cualquiera ABC con $c < a$, $c < b$. La proyección de O en CB y CA son F , y G respectivamente. La proyección de I en CB y CA son H y K respectivamente. Ahora:

$$HF = BF - BH = \frac{1}{2}a - (s - b) = \frac{1}{2}(b - c) = \frac{1}{2}CD \quad \text{y}$$

$$KG = \frac{1}{2}(a - c) = \frac{1}{2}CE. \quad \text{La prolongación de } GO \text{ intercepta a } IH \text{ en } L. \text{ Consideramos el triángulo } OIL. \text{ El ángulo } \angle ILO = x = \angle C, \text{ por lo que: } OL \text{ es perpendicular a } CA, \text{ y } CB \text{ es perpendicular a } IL. \text{ Es fácil verificar que:}$$

$$IL = \frac{KG}{\text{sen } x} = \frac{CE}{2\text{sen } x} \quad \text{y} \quad OL = \frac{HF}{\text{sen } x} = \frac{CD}{2\text{sen } x}. \quad \text{Vemos que los triángulos } LIO \text{ y } CED \text{ son semejantes, } LI:LO = CE:CD. \text{ Mas aun } LI \text{ es perpendicular a } CE \text{ y } LO \text{ es perpendicular a } CD, \text{ implica que } IO \text{ es perpendicular a } ED. \text{ También } IO = \frac{DE}{2\text{sen } x}, \text{ y para } x = 30^\circ, \text{ esto da que } IO = DE, \text{ como estaba solicitado.}$$

Solución: D.J. Smeenk, The Netherlands, diagramada y traducida por Aldo Gil C.



Problema 6

Otro problema espectacular, me tomo un par de horas de concentración a fondo para terminar.

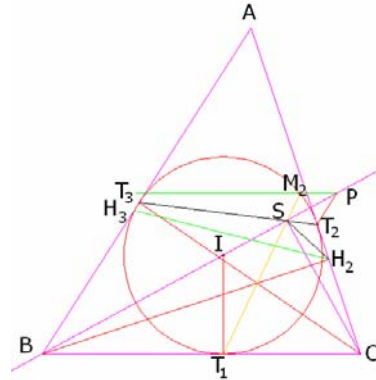
Sean AH_1, BH_2, CH_3 las alturas de un triángulo acutángulo ABC . El círculo inscrito toca los lados BC, CA, AB en T_1, T_2, T_3 , respectivamente. Considerar las imágenes simétricas de las líneas H_1H_2, H_2H_3, H_1H_3 con relación a las líneas T_1T_2, T_2T_3, T_1T_3 . Probar que estas imágenes forman un triángulo cuyos vértices están en el incírculo del triángulo ABC .

Fuente: Lista corta de Problemas IMO 2000-Problema G8

Solución

Sean M_1, M_2, M_3 las reflexiones de T_1, T_2, T_3 , a lo largo de las bisectrices de $\angle A, \angle B, \angle C$, respectivamente. Los puntos M_1, M_2, M_3 obviamente están en el incírculo del triángulo ABC .

Probaremos que los vértices del triángulo formado por las imágenes en cuestión que establecen la demanda. Por simetría es suficiente demostrar que la reflexión l_1 de H_2H_3 en T_2T_3 pasa por M_2 . Sea I el incentro del triángulo ABC . Notamos que T_2 y H_2 están siempre del mismo lado de BI , con T_2 entre BI y H_2 . Consideramos solo el caso cuando C es-



ta en el mismo lado de BI , como se muestra en la figura (menores modificaciones son necesarias si C esta en el otro lado). Sea $\angle A = 2\alpha, \angle B = \beta, \angle C = 2\gamma$

Lema. La imagen de H_2 con respecto a T_2T_3 esta en la línea BI

Prueba: Sea l perpendicular a T_2T_3 , H_2 perteneciente a l . Denotamos por P y S los puntos de intersección BI con l y BI con T_2T_3

Notar que S esta en los segmentos T_2T_3 y BP . Esto es suficiente para probar que: $\angle PSH_2 = 2\angle PST_2$. Tenemos que $\angle PST_2 = \angle BST_3$, y por el teorema del ángulo externo: $\angle BST_3 = \angle AT_3S - \angle T_3BS = (90 - \alpha) - \beta = \gamma$.

Lo próximo, $\angle BST_1 = \angle BST_3 = \gamma$, por simetría a través de BI . Notar que C y S están en el mismo lado de IT_1 . Como $\angle BT_1S = 90^\circ + \alpha > 90^\circ$. Entonces, en vista de las igualdades $\angle IST_1 = \angle ICT_1 = \gamma$, el cuadrilátero SIT_1C es cíclico, así $\angle ISC = \angle IT_1C = 90^\circ$. Pero entonces BCH_2S es también un cuadrilátero cíclico, porque $\angle BH_2C = 90^\circ$. De aquí: $\angle PSH_2 = \angle C = 2\gamma = 2\angle PST_2$ como se desea.

Notar que la prueba del lema también conduce a $\angle BPT_2 = \angle SH_2T_2 = \beta$, por simetría a través de T_2T_3 y porque el cuadrilátero es cíclico. Entonces, desde que M_2 es la re-

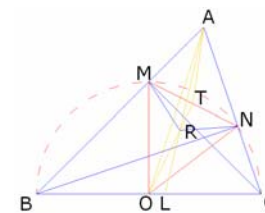
flexión de T_2 a través de BI , obtenemos $\angle BPM_2 = \angle BPT_2 = \beta = \angle CBP$, y así PM_2 es paralela a BC . Al probar que M_2 esta en l_1 , es ahora suficiente demostrar que l_1 es también paralela a BC . Suponemos $\beta \neq \gamma$; y sea CB que corta a H_2H_3 y T_2T_3 en D y E respectivamente. (Notar que D y E están en la línea BC y al mismo lado del segmento BC). Un fácil calculo da $\angle BDH_3 = 2|\beta - \gamma|$; $\angle BET_3 = |\beta - \gamma|$ y la línea l_1 es de hecho paralela a BC . La prueba esta completa.

Solución: Los autores, diagramación, interpretación y traducción por Aldo Gil C

Problema 7

Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$. El círculo con diámetro BC intercepta los lados AB y AC en M y N , respectivamente. Sea O el punto medio de BC . Las bisectrices de los ángulos BAC y MON se interceptan en R . Probar que los circuncírculos de los triángulos BMR y CNR tiene un punto en común en BC .

Fuente: Lista Corta IMO 2004-Propuesto Por Rumania



Solución

Desde que $OM = ON$, la bisectriz de $\angle MON$ coincide con la mediatriz de MN . Así en el triángulo AMN la bisectriz de $\angle MAN$ y la mediatriz de MN se cortan en R . Entonces, como sabemos, R esta en el circuncírculo del triángulo. (Necesitas notar que $AM \neq AN$; de hecho, $\angle AMN = \angle C$ y $\angle ANM = \angle B$ del cuadrilátero cíclico $BCNM$, y $\angle B \neq \angle C$ por hipótesis).

La bisectriz de $\angle BAC$ corta a BC en L . Es fácil ver que L es un punto común de los círculos (BMR) y (CNR) . Esto demuestra que los cuadriláteros $BLRM$ y $CLRN$ son cíclicos, lo cual es equivalente a $\angle ARM = \angle ABC$ y $\angle ARN = \angle ACB$. Pero $\angle ABC =$

$\angle ANM$ y $\angle ACB = \angle AMN$, como esta expresado, hace que la cuestión se reduce a: $\angle ARM = \angle ANM$, $\angle ARN = \angle AMN$. Estas igualdades hacen que el cuadrilátero $AMRN$ sea cíclico, y la demostración esta completa.

Solución: Dusan Djukic-Vladimir Jankovic-Ivan Matic-Nikola Petrovi-Traducción por Aldo Gil

Problema 8

Encontrar todos los enteros positivos m y n donde se cumpla que: $1!+2!+3!+\dots+n! = m^2$.

Fuente [Eb2, pp. 20] Q657, MM 52(1979), 47, 55

Solución

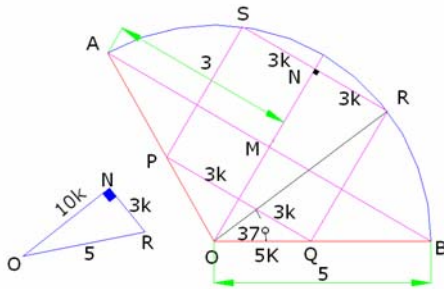
$1! = 1^2$ nos da la solución (1,1)
 $1! + 2! = 1^2$ la cual no es un cuadrado
 $1! + 2! + 3! = 3^2$ nos da la solución (3,3)
 $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ la cual no es un cuadrado.
 De aquí $10 | k!$ para todo $k \geq 5$,
 $1! + 2! + 3! + \dots + n! \equiv 3 \pmod{10}$ para todo $n \geq 4$. Pero no hay cuadrados perfectos

congruentes a 3 modulo 10: de aquí que las únicas soluciones son las que se encuentran detalladas arriba.

Solución: Los autores y traducción por Aldo Gil

Problema 9

Ya era hora de poner algo de algún colega peruano, así que me encuentro este en la red, y allí va, solución práctica y sencilla.....



Sea AB una cuerda de longitud 6 de una circunferencia de centro O y radio 5. El cuadrado PQRS esta inscrito en el sector OAB de modo tal que P esta en el radio OA. Q esta en el radio OB y R, S pertenecen al arco de circunferencia AB. Hallar el área del cuadrado PQRS.

Fuente: Lista Snack ...creo

Solución:

$$(3k)^2 + (10k)^2 = 5^2$$

$$k^2 = \frac{25}{109}$$

$$\text{Área} = (6k)^2 = \frac{36 \cdot 25}{109} = \frac{900}{109}$$

Solución: Un amigo de Perú-SamLumor (acá no hice nada mas que transcribir el dibujo)

Problema 10

Probar que en un heptágono regular [ABCDEFGH] de lado 1, se cumple:

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1$$

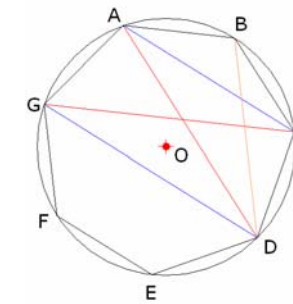
Fuente: De una Web portuguesa

Solución:

Este problemita extraído de una pagina portuguesa me intereso bastante, por la simple aplicación, y la demostración bastante académica de los solicitado

Sea el heptágono regular [ABCDEFGH] De la figura

Como sabemos $AB = BC = \dots = GA = 1$ y $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \dots = \angle GBA$ y



en consecuencia las áreas de los triángulos ABC y BCD son iguales y $AC = BD$. Pero $AD = CG$, por ser diagonales de un trapecio isósceles y $AD = DG$, por ser cuerdas correspondientes a arcos iguales ($\frac{6\pi}{7}$)

Por el teorema de Ptolomeo, aplicado al cuadrilátero ABCD, nos da

$$AB^2 + AD \cdot AB = AC^2 \text{ en nuestro caso, } 1 + AD = AC^2 \dots \dots \dots (1)$$

Aplicado al cuadrilátero ACDG, nos da:

$$AB^2 + AC \cdot DG = AD^2 \text{ en nuestro caso, } 1 + AC \cdot DG = AD^2, \text{ ó } 1 + AC \cdot AD = AD^2 \dots \dots (2)$$

Esta última igualdad (2) y la primera (1) permiten escribir

$$AC \cdot AD = AD^2 - 1 = (AD - 1)(AD + 1) = (AD - 1) \cdot AC^2 \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{y } AC \cdot AD = (AD - 1) \cdot AC^2$$

$$AD = (AD - 1) \cdot AC$$

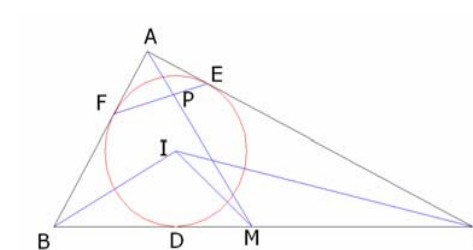
$$AD = AD \cdot AC - AC$$

$$AD + AC = AD \cdot AC \dots \dots \dots (4)$$

Dividiendo por $AC \cdot AD$ ambos términos de esta ultima igualdad, obtenemos el resultado deseado: $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1$

Solución: Los autores y traducción por Aldo Gil C.

Problema 11

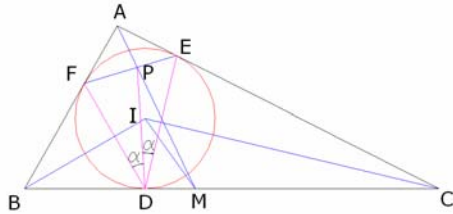


Las rectas AB, BC, AC de un triángulo ABC son tangentes al círculo inscrito de centro I en los puntos D, E, y F respectivamente. La bisectriz interior de $\angle BIC$ intercepta a BC en M. P es la intersección de FE y AM. Se pide demostrar que DP es la bisectriz de $\angle FDE$.

Fuente: Propuesto por España para la Olimpiada Mediterránea de Matemática 1998

Solución:

Sabemos que: $AE = AF = p - a$, $BD = BF = p - b$,



$$CD = CE = p - c, DF = 2(p - b) \sin \frac{B}{2},$$

$$DE = 2(p - c) \sin \frac{C}{2}. \text{ Por el teorema de}$$

la bisectriz en el triángulo BIC tenemos:

$$\frac{BM}{MC} = \frac{BI}{CI} = \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2}}. \text{ Por propiedad de}$$

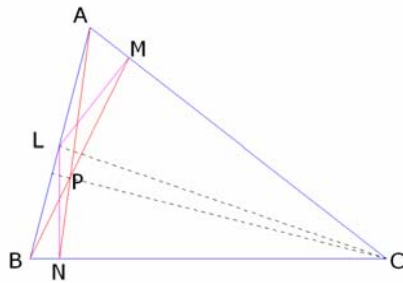
cevianas, $\frac{AF}{AB} \cdot \frac{MB}{MC} \cdot \frac{AC}{AE} \cdot \frac{PE}{PF} = 1$, de donde resulta: $\frac{PE}{PF} = \frac{c}{p-a} \cdot \frac{\sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \cdot \frac{p-a}{b} = \frac{c \cdot \sin \frac{B}{2}}{b \cdot \sin \frac{C}{2}}$

$$= \frac{c \cdot \sin \frac{C}{2}}{b \cdot \sin \frac{B}{2}} \cdot \frac{\sin^2 \frac{B}{2}}{\sin^2 \frac{C}{2}} = \frac{c \cdot \sin \frac{C}{2}}{b \cdot \sin \frac{B}{2}} \cdot \frac{(p-a)(p-c)}{ac} \cdot \frac{ab}{(p-a)(p-b)} = \frac{(p-c) \cdot \sin \frac{C}{2}}{(p-b) \cdot \sin \frac{B}{2}} = \frac{DE}{DF}$$

Así, por reciprocidad del teorema de bisectriz (DP es bisectriz de $\angle FDE$).

Solución: Titu ZVONARU1, Bogdan IONITA-Diagramacion y traduccion por Aldo Gil C.

Problema 12



En un triángulo ABC . La bisectriz del ángulo $\angle ACB$ intercepta a AB en L . Los pies de las perpendiculares desde L a AC y BC son M y N respectivamente. Sea P el punto de intersección de AN y BM . Probar que CP es perpendicular a AB .

Fuente: Bulgarian Mathematical Competitions-2000-9b.2

Solución

Sea l la línea que pasa por Q la cual es paralela a AB . Sean F y E los puntos de intersección de AN y BM con l . El punto de intersección de CP y AB es denotado por D .

Obtenemos: $\frac{AD}{CF} = \frac{PD}{PC} = \frac{BD}{CE}$, así $\frac{AD}{BD} = \frac{CF}{CE}$. Por otro lado $\frac{AM}{CM} = \frac{AB}{CE}$ y $\frac{BN}{CN} = \frac{AB}{CF}$. Pero

$CM=CN$ y tenemos: $\frac{AM}{BN} = \frac{CF}{CE}$. En consecuencia $\frac{AD}{BD} = \frac{AM}{BN}$, lo cual implica:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BD} \dots (I)$$

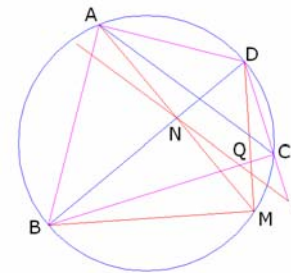
Si $CH \perp AB$ (H pertenece a AB), entonces $\triangle ALM \approx \triangle AHC$, y $\frac{AL}{AC} = \frac{AM}{AH}$. De la misma ma-

nera $\frac{BL}{BC} = \frac{BN}{BH}$. Pero CL es bisectriz y por lo tanto: $\frac{AL}{AC} = \frac{BL}{BC}$, Así $\frac{AM}{AH} = \frac{BN}{BH}$. La última

ecuación combinada con (I) nos conduce a que $D \equiv H$ lo cual implica $CP \perp AB$.

Solución: Los autores, diagramación y traducción de Aldo Gil

Problema 13



El cuadrilátero $ABCD$ es inscrito en un círculo de diámetro BD . Sea M el punto simétrico de A con respecto a BD y sea N la intersección de AM y BD . La línea que pasa por N , la cual es paralela a AC , intercepta a CD y BC en P y Q respectivamente. Probar que los puntos P, C, Q y M son vértices de un rectángulo.

Fuente: Winter Mathematical Competition Russe-Febrero 2000-9a.2

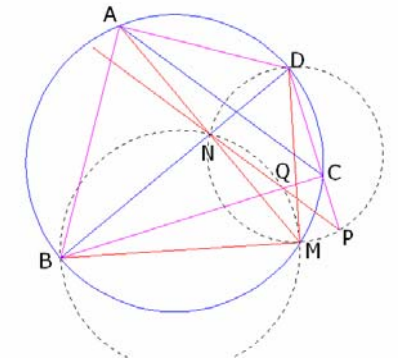
Solución

De la condición del problema M está en el circuncírculo de $ABCD$. Sea M el $\angle MAC = \angle MBC = \frac{\text{Arco } MC}{2}$ y $\angle MNQ = \angle MAC$. $\angle MNQ = \angle MBC$, te-

tenemos que los puntos M, N, B y Q están en círculo. Desde que $\angle MNB = 90^\circ$ concluimos que $\angle BQM = 90^\circ$. También, desde que el triángulo BDC es rectángulo tenemos que $MQ \parallel PC$. Por otro lado $\angle MDC = \angle MAC = \frac{\text{Arco } MC}{2}$, y por lo

tanto $\angle MDC = \angle MNQ$, así que los puntos N, P, M y D están en un círculo. Esto es $\angle MPD = \angle MND = 90^\circ$ y $MP \parallel CQ$. De aquí P, C, Q y M son los vértices de un rectángulo.

Solución: Los autores diagramación y traducción por Aldo Gil



Problema 14

Sea ABC un triángulo, sea D un punto en AB , E en AC ubicado de tal forma que si F es el punto de intersección de BE y CD , entonces $AB+EF=AD+DF$. Probar que $AC+CF=AB+BF$.

Fuente: Lista Corta de problemas 1992-Propuesto por Austria

Solución

Ubicamos X en FE (prolongado), Y en FD (prolongado), Z en FC (prolongado) y W en FB (prolongado) tal que $EX=AE$, $DY=AD$, $CZ=AC$, $BW=AB$. Entonces $FX=AB+BE=AD+DF=FY$, $FW=AB+BF$, $FZ=AC+CF$. Es suficiente demostrar que: $FW=FZ$.

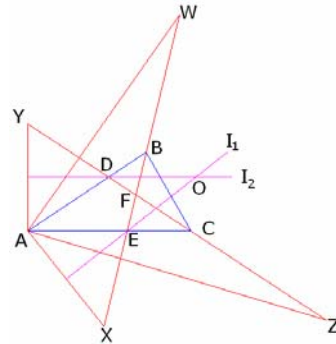
Sean I_1 y I_2 las bisectrices de los ángulos AEX y ADF respectivamente. Desde que los triángulos AEX y ADY son isósceles, I_1 e I_2 son mediatrices de AX y AY . Sea $\alpha = \angle EAX = \angle AXE$ y $\beta = \angle DAY = \angle DYA$, entonces $\angle AEB = 2\alpha$ y $\angle ADF = 2\beta$.

Desde que $2\alpha + \angle BAC < 180^\circ$ y $2\beta + \angle BAC < 180^\circ$ tenemos: $\alpha + \beta + \angle BAC < 180^\circ$, $\angle YAX < 180^\circ$. Así I_1 e I_2 se interceptan en O , digamos. Tenemos que $OX=OA=OY$, como I_1 e I_2 son mediatrices de AX , AY respectivamente.

Desde que $FX=FY$, los triángulos OFX , OFY son semejantes, y OP biseca $\angle WFX$. Entonces O es equidistante de WX y YZ . Pero O es equidistante de AE y WX , así como de AD y YZ . De aquí O es equidistante de las cuatro líneas AE, AD, WX, YZ . OC biseca $\angle ACZ$ y desde que el triángulo ACZ es isósceles tenemos $OA=OZ$. En forma similar OE biseca el ángulo $\angle ACZ$ y $OA=OW$. Por lo tanto: $OA=OW=OX=OY=OZ$.

Adicionalmente, los triángulos isósceles OWX y OYZ tienen alturas iguales desde O ; de aquí que ellos son congruentes y $WX=YZ$. Luego $FX=FY$, tenemos: $FW=WX-FX=YZ-FY=FZ$.

Solución: Los autores y traducción de Aldo Gil.



Problema 15

Determinar los pares (x,y) de enteros positivos que satisfacen la ecuación:

$$(x+y)^2 - 2(xy)^2 = 1$$

Fuente: Poland 2002-Tomado de PEN Website- Febrero 2007

Solución

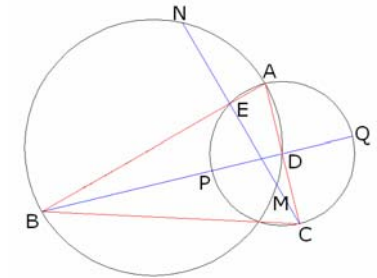
Desde que x,y son enteros positivos y la ecuación puede ser escrita como $(x+y)^2 - 2(xy)^2 = 1 + (xy)^2 > 0$, implica que: $x+y-xy > 0$, así $0 \leq y < E\left(\frac{x}{x-1}\right)$ ($E(u)$ es la parte entera de u) si $x=2$ entonces los valores de y son $0; 1; 2$ y si $x=1$ la ecuación retorna los valores de $y=0, 2$ y si no los únicos valores de y son $0, 1$. Las soluciones son $(0,1), (1,0), (2,1), (1,2)$.

Solución: En la lista y traducido por Aldo Gil.

Problema 16

Un triángulo acutángulo ABC es tomado en un plano. El círculo con diámetro AB intercepta la altura CE y su prolongación en los puntos M y N , y el círculo con diámetro AC intercepta la altura BD y su prolongación en los puntos P y Q . Probar que M, N, P, Q están en un mismo círculo.

Fuente: Mathematical Olympiad USA-1990



Solución

Si M, N, P, Q son concíclicos, entonces A debe ser el centro, porque es la intersección de las mediatrices de PQ y MN . Luego es suficiente demostrar que $AP=AM$. Considerando los triángulos semejantes ADP y APC , tenemos que $\frac{AD}{AP} = \frac{AP}{AC}$, de aquí: $AP^2 = AD \cdot AC$. En forma similar $AM^2 = AE \cdot AB$. De aquí: $\angle BEC = \angle BDC$, los puntos B, C, D, E son concíclicos. En consecuencia $AD \cdot AC = AE \cdot AB$ y luego $AP=AM$.

Solución: William Cheung Pok Man y traducción por Aldo Gil

Bueno mis queridos amigos:

Con este número llegamos al final de la primera etapa, y la verdad que me siento muy satisfecho por el trabajo realizado. Ha sido una ardua tarea, un poco de sueño abandonado, quizás un poco de cariño arrebatado a la compañera, hijos y nietas, por estar sentado frente al escritorio, papel y lápiz como arma y mi pequeña computadora que no me abandona, silenciosa y paciente, audífonos al oído escuchando a Hendrix, Zeppelin y otros rockeros de los 70 (mi promoción), un buen diccionario en la red y en crudo, y en fin todos los elementos necesarios para realizar este trabajo con todo cariño,

agradecer las palabras de aliento de ustedes, los consejos y las críticas, eso indica que el trabajito de marras les ha gustado.

Que mas quisiera que los problemitas estén circulando por las escuelas, y que haya servido de utilidad a los estudiantes, y porque no a todos aquellos que les agrada la matemática.

No hay mas rollos, solo la soledad de la lectura, de la reflexión, y el esbozo de sonrisa al leer las soluciones y los comentarios a veces ácidos, a veces jocosos, pero representan todo mi temperamento contestatario, de romper las reglas, un inadapto del sistema, un anarquista anti-sistema, un luchador contra la impunidad, es decir que no solo vivimos de ciencia, nos roba la vida el saber luchar por lo que se nos presenta en la vida, nos roba la vida tratar de ser de buen corazón, de no ser egoístas y ser mirado como bicho raro por esto. Pero no importa.

Lo importante son ustedes y su agradecimiento, no pensé tener hoy tantos amigos a la distancia.

Hasta pronto (no es un adiós, solo un hasta luego)....

Aldo Gil Crisóstomo

Y para romper la formalidad, después del fin, fastidio nuevamente con algo que no podía dejar de publicar, algo del gran maestro Michael de Villiers, (estoy en proceso de traducción de sus trabajos), y una perla, una demostración sin palabras

Ahora si.....me voy

Fotos: Aldo chiquito de 4 años, con mi linda madre, que en paz descansa

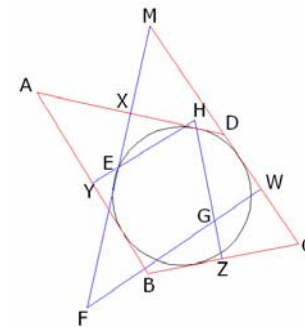
Aldo viejito, y un poco más gordo.

Madre: Te quiero mucho, estés donde estés.....



Algunas aventuras en Geometría Euclidiana por el profesor Michael de Villiers (1994; revised 1996). Univ. of Durban-Westville (now Univ. of KwaZulu-Natal), pp. 192-193, el cual me parece muy importante compartir.

Teorema: Las mediatrices de un cuadrilátero circunscrito a un círculo, forman otro cuadrilátero circunscrito.



Prueba:

Nosotros usaremos la notación dada en la figura y también lo siguiente:

$AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, t_A es la tangente de A al incírculo, r es el radio del incírculo. Podemos asumir que $r=1$. Tenemos:

$$MD = -\frac{d}{2 \cos D}, \quad MW = \frac{c}{2} - \frac{d}{2 \cos D}$$

$$FW = MW \cdot \cot(180^\circ - D) =$$

$$\frac{d}{2 \sin D} - \frac{c}{2} \cot D. \quad \text{En forma similar:}$$

$$FX = \frac{c}{2 \sin D} - \frac{d}{2} \cot D, \text{ y de aquí: } 2(FX - FW) = \frac{c-d}{\sin D} + (c-d) \cdot \cot D$$

$$= (c-d) \cdot \frac{1 + \cos D}{\sin D} = (c-d) \cdot \cot \frac{D}{2} = (c-d) \cdot \frac{t_D}{r} = (c-d) \cdot t_D$$

Igualmente para $2(HZ-HY)$, $2(EY-EX)$ y $2(GW-GZ)$. Ahora debemos verificar que la suma de los lados opuestos son iguales, o alternativamente que $EF-EH+HGGF=0$, sabemos que $(FX-EX)-(HY-EY)+(HZ-GZ)-(FW-GW)=0$ o $2(FX-FW)+2(HZ-HY)+2(EY-EX)+2(GW-GZ)=0$. En vista de los resultados previos la última ecuación es equivalente a:

$$(c-d) \cdot t_D + (d-a)t_A + (a-b)t_B + (b-c)t_C = 0 \dots (I)$$

Como $c-d = b-a$ y $d-a = c-b$, la ecuación (I) es equivalente a:

$$(c-d)(t_D - t_B) + (d-a)(t_A - t_C) = 0 \dots (II)$$

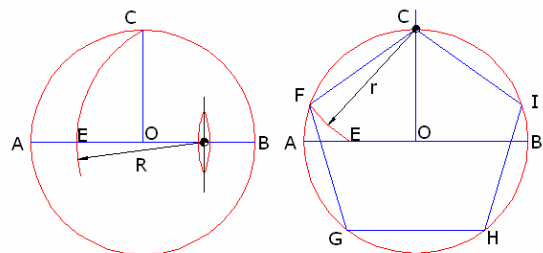
Pero $c-d = (t_C + t_D) - (t_D + t_A) = t_C - t_A$ y de igual forma $d-a = t_D - t_B$.

Por consiguiente (II) es equivalente a $(t_C - t_A)(t_D - t_B) + (t_D - t_B)(t_A - t_C) = 0$, la cual es una identidad y completa la prueba.

Note: Descargar [Zipped Sketchpad sketch](http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/circumquad.zip) directo de <http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/circumquad.zip>

Construcción sin palabras

Inscribir un Pentágono regular en un círculo de radio 1



$$\text{Longitud de lado: } 2 \operatorname{sen} 36^\circ = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{1 + \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{2}}$$