Problema 1

Si: $x^2+y^2=1$; tal que: $\{x;y\}$ pertenece a los reales. Halle el máximo valor de: $3x + 4y$

Fuente: Propuesto por Denisse-Grupo Matracas-Abril 2007

Solución:

Una forma de hacerlo es despejar la y de la condición restrictiva y sustituir en la función a maximizar, aplicando entonces el cálculo diferencial para hallar su máximo para x en [-1, 1].

Alternativamente, podemos darnos cuenta de que la restricción representa una circunferencia de radio 1 centrada en el origen y que las ecuaciones $3x + 4y = k$ representan rectas, que para k positivo cortan a los semiejes positivos OX y OY, tanto más alejadas del origen cuanto mayor sea k. Como debe cortar a la circunferencia, el máximo valor de k se producirá cuando sea tangente.

Como la tangente es perpendicular al radio, el radio del punto de tangencia tiene la dirección del vector (3,4). Es decir, $\frac{y}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{4x}{3}$ en ese punto. Sustituyendo en la ecuación de la circunferencia,

$$x^2 + \frac{16x^2}{9} = 1 \Rightarrow 25x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\frac{3}{5}.$$

Como estamos interesados en puntos del primer cuadrante, tomamos:

$$x=\frac{3}{5} \Rightarrow y=\frac{4}{5}. \quad 3x + 4y = 3.\frac{3}{5} + 4.\frac{4}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

Alternativamente, se puede hallar k para que la distancia de la recta: $3x + 4y - k = 0$ al origen sea igual a 1 (el radio de la circunferencia). Es decir,

$$1 = \frac{|3.0+4.0-k|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\frac{k}{5} \Rightarrow k=\pm 5.$$

Como estamos interesados en el máximo, $k = 5$.

Solución: Ignacio Larrosa Cañestro

Problema 2

Tres mujeres están en una fila de la panadería, la primera compra 5 panes, 2 litros de leche y un paquete de café gastando *R*\$ 6,20. La segunda gasta *R*\$ 9,80 para comprar 6 panes, 2 litros de leche y 2 paquetes de café. Cuanto gasta una tercera mujer para comprar 8 panes, 3 litros de leche y 2 paquetes de café?

Fuente: Adaptado do libro Mathematical Quickies de Charles W Trigg

Solución

Sea P precio del pan, L de la leche y C del café, sabemos que:

$5P+2L+C=6.20$

$6P+2L+2C=9.80$

Queremos saber:

$8P+3L+2C=$?

Debemos buscar dos números α y β tales que:

(1) $\alpha(5P+2L+C) + \beta(6P+2L+2C) = 8P+3L+2C$

Luego:

(2) $5\alpha P + 6\beta P = 8P$

(3) $2\alpha L + 2\beta L = 3L$

(4) $\alpha C + 2\beta C = 2C$

de (3) y (4) encontramos $\alpha = 1$ y $\beta = ½$

sustituyendo en (1) $1(5P+2L+C) + ½ (6P+2L+2C) = 8P+3L+2C$

$1(6.20) + 1/2(9.80) = 8P+3L+2C$

$8P+3L+2C = 11,10$

Resp.: La tercera mujer gastó *R*\$ 11,10

Problema 3

¿La igualdad $3^{100} + 7^{100} = 8^{100}$ es verdadera ó falsa?

Fuente: Kvant Selecta – Álgebra y Análisis I AMS Vol 14 – 1991

Solución

Observa que 3+7 es mayor que 8. Mas $3^2 + 7^2 = 58$ que es menor que 8^2. Además de esto $3^{100} + 7^{100} = (3^2)^{50} + (7^2)^{50} < (3^2 + 7^2)^{50} = 58^{50} < 64^{50} = 8^{100}$. Por lo tanto la igualdad es falsa.

Problema 4

Dada una tira arbitraria de números $\overline{abcd....xy}$ demostrar que existen infinitos primos que la contienen. En particular, por ejemplo, hay infinitos primos de la forma..1234567890...

Fuente: Anibal Amuchastegui - Lista de discusión Snark Agosto 1996

Solución

Volviendo al tema de este problema, quiero comentar que la demostración utiliza un resultado (debido a Dirichlet o Dedekind, no recuerdo bien) y quizás no muy conocido, por lo que voy a enunciarlo aquí.

Se trata de lo siguiente:

Si a y b son dos números enteros positivos sin divisores primos en común (acoto que el número 1 no se considera primo) entonces la sucesión:

$a+b$ $a+2b$ $a+3b$ $a+4b$ $a+5b$ .... $a+Nb$ ...., contiene infinitos números primos.
En particular, sea $\overline{abcd....xy}$ nuestra tira arbitraria de dígitos. Agreguemos un 1 al final para asegurarnos de que $\overline{abcd....xy1}$ no sea múltiplo de 2 ni de 5.
Tomemos por otra parte el número 100.....000 (tantos ceros como dígitos tiene $\overline{abcd....xy1}$) entonces la sucesión: $1000...000*N + \overline{abcd....xy1}$ (N=1,2,3,....), contiene infinitos números primos, todos ellos terminados en $\overline{abcd....xy1}$.

Solución:Gustavo Piñeiro

<u>*Problema 5*</u>

Uno de criptosuma con palabras alemanas

VIER es un cuadrado perfecto

NEUN es un cuadrado perfecto

SECHS es un número triangular *(la suma de 1+2+...+n)*

La pregunta es ¿Cuanto vale *DREI?*

Fuente: Pablo Adrian Sussi

<u>*Solución*</u>

Empezando con *NEUN*, hay sólo 5 cuadrados de 4 dígitos cuyos miles y unidades sean iguales.

Siguiendo con *SECHS*, hay sólo 29 números triangulares de 5 dígitos con decenas de miles y unidades iguales.

Comparando y descartando quedan 3 combinaciones para (*NEUN, SECHS*): (1521,85078) (9409,54285) (9409,54615)

Ahora hay que encontrar cuadrados de 4 dígitos con decenas en 4 ó 5 para satisfacer *VIER*.

Hay 3 con decenas en 5 y 8 con decenas en 4. Descartando, la única combinación posible es:

NEUN	1521	(39^2)
SECHS	85078	($\frac{412x413}{2}$)
VIER	4356	(66^2)
DREI	9653	

Solución: Daniel Ricardo Suárez

<u>*Problema 6*</u>

Del libro Mathematical Puzzles de Peter Winkler:

Mike y Jane van a una fiesta con otras 4 parejas.

Cada persona le da la mano a cada uno que no conoce.

Mas tarde Mike se da cuenta que cada una de las 9 personas dio la mano diferente cantidad de veces.

¿A cuantas personas le dio Jane la mano?

Fuente: Recopilado por Rodolfo Kurchan

<u>*Solución*</u>

Hay 10 personas, cada uno conoce obviamente a su pareja y no se puede saludar a si mismo, por lo tanto si las 9 personas excepto Mike dieron la mano diferentes veces, lo hicieron del 0 al 8

Empecemos por el que saludó a 8, evidentemente saludó a todos menos a él y a su esposa/o. Quiere decir que todos menos su esposa/o fueron saludados al menos una vez, luego su esposa saludó 0 veces.

El que saludó 7 veces, saludó a todos menos al que saludó 0 veces, a su propia pareja y a él mismo. Luego su pareja saludó solo 1 vez (al que saludó 8 veces), ya que todos los demás fueron saludados al menos 2 veces ya. Siguiendo este mismo razonamiento. El que saludó a 6 hace pareja con el que saludó a 2, y el de 5 con el de 3. Queda el que saludó 4 veces que es Jane

Solución: Pablo Adrian Sussi

<u>*Problema 7*</u>

Encontrar un número primo tal que:

a) la suma de los cuadrados de sus dígitos es un cuadrado perfecto

b) el cuadrado del número primo es también la suma de cinco números primos consecutivos

<u>*Solución*</u>

Algunas aproximaciones preliminares ya que todavía no hallé la respuesta

El único primo de 2 cifras que la suma del cuadrado de sus dígitos es un cuadrado es el 43

El cuadrado de sus dígitos suma 25, pero 43^2=1849, y este número no puede ser la suma de 5 primos consecutivos. Otros números de 2 cifras que suman cuadrados son el 34 68 y 86 pero obviamente no son primos.

Pasamos a los de 3 cifras que sean impares y vemos si son primos

Probamos si hay que sumen 9 sólo el 221 pero no es primo

Que sumen 16 no hay

Que sumen 25 el 403 pero no es primo

Que sumen 36 no hay

Que sumen 49el 263 y el 623 .El 263 es primo pero su cuadrado 69169 no puede alcanzarse con la suma de 5 primos consecutivos. El 623 no es primo

Que sumen 64 no hay

Que sumen 81 el 481 y el 841 pero ninguno de los 2 es primo

Que sumen 100 no hay

Que sumen 121 el 269 y el 629. Sólo el 269 es primo pero tampoco su cuadrado es la suma de 5 primos consecutivos.

Que sumen 144 no hay, tampoco 169 y 225.

Por lo tanto el dichoso primo tiene al menos 4 dígitos.

Parte II

Como dije tenía que tener como mínimo 4 dígitos y lo hallé, a manopla con calculadora de windows y tabla de primos solamente, mirada por internet intermitentemente. Paso a detallar el proceso con los de 4 dígitos hasta que lo encontré:

Pongo obviamente sólo los impares,

que sumen 4 el 1111 no es primo

que sumen 9 el 2021 y el 2201 pero ninguno es primo

que sumen 16 no hay

que sumen 25 4221 no primo y 4003 primo pero no dan los 5 consecutivos

que sumen 36 1153 1531 3511 5113 todos primos pero no dan los consecutivos y 5131

5311 1351 3151 y 1513 que no son primos

que sumen 81 8041 8401 y 4081 no primos, 4801 primo pero no da

que sumen 49 2603 6023 no primos y 6203 y 2063 primos pero no da

que sumen 100 1177 7117 1771 1717 7711 y 7171 no resultan

ya iba a pasar al 121 cuando me di cuenta que había otra combinación de números que daban 100, un 1, dos 3 y un 9 1+81+9+9=100

De ellos encontré que son primos el 3931 3319 3391 9133 y no lo son el 3913 1339 1393 3139 3193 9313 y 9133.

Dejo para el final el buscado el 1933 primo

$1933^2 = 3736489$

747277+747283+747287+747319+747323=3736489

Solución: Pablo Adrián Sussi (a puño limpio)

Problema 8

Hallar todos los triángulos rectángulos con lados enteros tales que la magnitud del área sea igual a la magnitud de su perímetro.

O sea, hallar todas las ternas pitagóricas (x ,y,z) que cumplan esas condiciones.

Fuente: Benjamin Buritica Trujillo Aparecido en Snark en Febrero de 1998

Solución

La demostración es como sigue:

Sean x e y los lados del triangulo rectángulo.

Si *PERIMETRO* = *AREA*, entonces:

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}xy$$

Despejando la raíz cuadrada, elevando al cuadrado y simplificando:

$$x^2 + y^2 = [(1/2)x.y - x - y]^2$$

$$x^2 + y^2 = (1/4)(x.y)^2 + x^2 + y^2 - (x^2).y - x.(y^2) + 2(x.y)$$

$$0 = (x.y)^2 - 4(x.y).(x+y) + 8(x.y)$$

$$0 = (x.y) - 4.(x+y) + 8$$

Despejando x de esta ecuación lineal: $x = 4 + \frac{8}{y-4}$; de donde se deduce que y-4 es un divisor de 8:

$y - 4 = 1 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 13$

$y - 4 = 2 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 10$

$y - 4 = 4 \Rightarrow y = 8 \Rightarrow x = 6$ (la solución anterior)

$y - 4 = 8 \Rightarrow y = 12 \Rightarrow x = 5$ (la primera solución)

Respuestas:

(6,8,10) (área y perímetro *24) y*

(5,12,13) (área y perímetro *30).*

Solución: John Abreau

Problema 9

Ana y Pedro fueron al zoológico a ver un recinto con jirafas y avestruces y al salir Ana le pregunto a Pedro: ¿Contaste cuantas jirafas y cuantos avestruces había? Pedro respondió: Averigua tu sola, solo se que ví 30 ojos y 44 patas.

Que diga alguien cuantas jirafas y cuantos avestruces había!!!

Fuente: Ricardo Di Biasi - Aparecido en Snark en Febrero de 1998

Solución

Si llamamos...

x = cantidad de avestruces

y = cantidad de jirafas

1) $2x + 2y = 30$

2) $2x + 4y = 44$

si despejamos x de la ecuación 1) y sustituimos en 2)

$x = (30 - 2y) / 2$

$[2 (30 - 2y) / 2] + 4y = 44$

$(30 - 2y) + 4y = 44$

$30 + 2y = 44$

$y = (44 - 30) / 2$

$y = 7$

$x = (30 - 2y) / 2$

$x = (30 - 14) / 2$

$x = 16 / 2$

$x = 8$

Después de estos cálculos Ana le dijo con enojo a Pedro mostrándole el papel:

- Había 8 avestruces y 7 jirafas -

- Sin tanto papelerío podrías haber llegado a la misma conclusión -, replicó Pedro con suficiencia.

- ¿Cómo así?

(44 - 30) / 2 Es la cantidad de jirafas,
y (30 - 14) / 2 será la cantidad de avestruces.

- ¿Hace falta que te explique el por qué?

La historia cuenta que nunca más volvieron juntos al zoológico...

Solución: Carlos Davis

<u>*Problema 10*</u>

Hallar, si existen, todos los triángulos isósceles con lados enteros tales que la magnitud de su área sea igual a la magnitud de su perímetro. Disfrútenlo.

Fuente: John Abreau Aparecido en Snark en el año 1996

<u>***Solución***</u>

Déjame rayarme un poco...

Sean a los lados iguales del triangulo, b el lado desigual. De acuerdo al teorema de Heron:

$A = \sqrt{p(p-a)p-b)(p-b)} = 2p$

($p \Rightarrow$ semiperímetro)

$p = (2a+b)/2$

Reemplazando:

$[b^2(2a - b)(2a + b) /16] = 2a + b$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{16} = \frac{2a+b}{2a-b}$$

Por propiedad de proporciones:

$16 = (2a - b)k \Rightarrow 2a = 16/k + b$

$b^2 = (2a + b)k$

$b^2 = (16/k + 2b)k$

$b^2 - 2bk - 16 = 0$

$$b = 2k \pm \frac{\sqrt{4k^2+64}}{2}$$

$b = k \pm \sqrt{k^2+16}$

Veamos, como b es entero, k^2+16 debe ser cuadrado perfecto y obviamente k también es entero, entonces debe haber un z, tal que: $z^2 = k^2 + 4^2$

Pero solo hay una triada pitagórica que contiene al 4, y es la triada 3-4-5, entonces solo cumple para $k = 3$, entonces:

$b = 3 + \sqrt{3^2 + 4^2}$

$b = 8$

Sin embargo, reemplazando estos valores, obtenemos para el valor de 20/3, que no es entero... de lo cual se deduce que no hay valores enteros que cumplan...

Solución: Oscar Chacaltana Alarcon

Amigos:

De aquí me birle algo de Snark, me parecen brillantes problemas y brillantes soluciones, y dejé sus alegres comentarios.......Y bueno faltaba mas, lo que se ha ido viendo en la lista actual de Snark, algunos propuestos por mi (realmente recopilados), y sus soluciones.