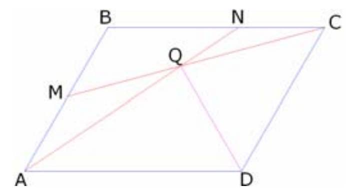
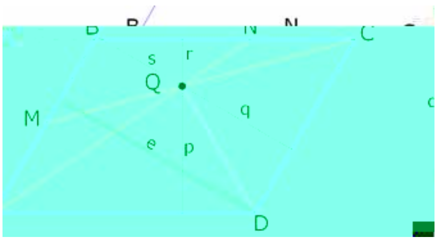
Problema 1

Sea $ABCD$ un paralelogramo. Se toman M y N sobre AB y BC respectivamente de tal forma que $AM=NC$. Luego se unen M con C y A con N, los cuales se cortan en Q. Probar que DQ es la bisectriz del ángulo $\angle ADC$.



Fuente: Delegación Francesa para la IMO 2004-1º Jornada-Problema 2

Solución



Sean d la distancia de AD y BC y sea e la distancia DC y AB. Llamamos p,q,r,s a las distancias de Q hacia AD,DC,CB, AB. En términos de áreas tenemos:

$2[AQC]=2[AMC]-2[AMQ]=e.AM-s.AM=q.AM.$

$2[AQC]=2[ANC]-2[QNC]=d.NC-r.NC=p.NC$

Como $AM=NC \neq 0$, se obtiene que $p=q$, por lo tanto Q esta en la bisectriz de $\angle ADC$.

Solución: Los proponentes, diagramación, adaptación y traducción del frances por Aldo Gil

Problema 2

ABC es un triángulo rectángulo en A. Construir los cuadrados $ABDE$ y $ACFG$ exteriores al triángulo, y sean P y Q los puntos de intersección de CD con AB, y de BF con AC, respectivamente. Demostrar que $AP=AQ$.

Fuente: Mathematicorum - Propuesto por Isao Ashiba, Japan – Problema 1537

Solución

Sea $AB=AE=p$ y $AC=AG=q$. Entonces $\Delta CAP \simeq \Delta CED$, tal que: $\frac{AP}{q}=\frac{AP}{AC}=\frac{DE}{EC}=\frac{p}{p+q}$, y de aquí: $AP=\frac{p.q}{p+q}$. También $\Delta BAQ \simeq \Delta BGF$, tal que:

$\frac{AQ}{p}=\frac{AQ}{AB}=\frac{FG}{GB}=\frac{Q}{p+q}$, y por lo tanto: $AQ=\frac{p.q}{p+q}=AP$.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil.

Problema 3

Encontrar los números reales x, y, z, w que satisfacen $x+y+z+w=x^7+y^7+z^7+w^7=0$.

Fuente: International Hungarian Mathematics Competition, Solutions for problems "A", 2000-Proposed by Shay Gueron, Haifa-Problema A.246

Solución

Lema. Si a,b son números reales y $a \neq 0$, entonces el sistema $x+y=a$, $x^7+y^7=b$ de ecuaciones tiene a lo suma una solución (ignorando el orden de las variables).

Prueba. Sea $x=\frac{a}{2}-z$, $y=\frac{a}{2}+z$. Por simetría podemos asumir que $z \geq 0$. Sustituyendo en la segunda ecuación, $\left(\frac{a}{2}-Z\right)^7+\left(\frac{a}{2}+Z\right)^7=b$; $7aZ^6+\frac{35a^3}{4}Z^4+\frac{21a^5}{16}Z^2+\frac{a^7}{64}=b.$

El lado izquierdo es estrictamente creciente o decreciente en z si $a>0$ ó $a<0$, respectivamente. Así la ecuación es valida para un z como máximo. El lema está completo.

Ahora demostramos que todas las soluciones para el sistema (1) contengan dos pares de números reales complementarios. Suponga que la suma de dos de las variables no es cero, digamos $x+y \neq 0$. Sea $a=-(x+y)$ y $b=-(x^7+y^7)$. Los números z,w satisfacen el sistema: $z+w=a$, $z^7+w^7=b$.

El par $(-x,-y)$ es una solución para este sistema; por el lema no hay mas soluciones. Así: $z=-x$ y $w=-y$, ó $z=-y$ y $w=-x$. Si la suma de dos de ellos x,y,z,w es 0, entonces $x=y=z=w=0$.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Problema 4

Probar que el producto de las raíces de la ecuación: $\sqrt{1196}.x^a=x^6$, donde $a=log_{1996}x$, es un entero y encontrar los cuatro últimos dígitos de este numero.

Fuente: Propuesto por Republic of Moldova XL Math. Olymp. 1996-11-12 Form-prob 2

Solución

Como $a=log_{1996}x$, en consecuencia: $log_{1996}\sqrt{1996}=\frac{1}{2}$, la ecuación dada es equivalente a: $\frac{1}{2}+a^2=6a$ (aplicando log_{1996} a cada lado). Denotamos por a_1 y a_2 las dos raíces de esta ecuación. Entonces las raíces de la ecuación dada son $x_1=1996^{a1}$ y $x_2=1996^{a2}$ cuyo producto es $1996^{a_1+a_2}=1996^6$. Esto es, el producto $x_1.x_2$ es el entero 1996^6.

Ahora $1996^6 = (2000\text{-}4)^6 = 2^6(2\text{-}1000)^6 = 2^6(2^6\text{-}6.2^5.1000+....)$. [Los puntos representan términos todos múltiplos de 10000, los cuales no influyen En los últimos 4 dígitos]. De aquí: $1996^6 \equiv 2^6(2^6\text{-}192000)(mod\ 10000)$

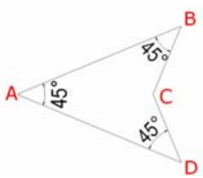
$\equiv 64(64+8000)\ (mod\ 10000)$

$\equiv 6096\ (mod\ 10000)$

Por lo tanto los cuatro últimos dígitos son 6 0 9 6

Solución: Michael Bataille

Problema 5

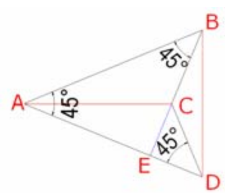


ABCD es un cuadrilátero cóncavo tal que: $\angle BAD = \angle ABC = \angle CDA = 45°$. Probar que $AC=BD$.

Fuente: Mathematical Excalibur Volumen 11-Febrero-Marzo 2006.

Solución

Trazar la línea *BC* que corta a *AD* en *E*, entonces $\angle BEA = 180° - \angle ABC - \angle BAD = 90°$. Notar que los triángulos *AEB* y *CED* son isósceles rectángulos. Así $AE=BE$ y $CE=DE$. Entonces $\Delta AEC \cong \Delta BED$. Así $AC=BD$.



Solución: Chan Tsz Lung- Traducción de Aldo Gil C.

Problema 6

Resolver la siguiente ecuación en el conjunto de los enteros: $2x^4+x^2y^2+5y^2=y^4+10x^2$.

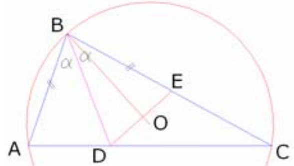
Fuente: International Hungarian Mathematics Competition, Solutions for exercises "B" in February, 2002 B.3522

Solución:

Si $A=x^2$ y $B=y^2$, entonces reacomodando la ecuación y factorizando tenemos $(2A-B)(A+B-5)=0$. Así $2x^2=y^2$, y de aquí $x=y=0$, ó $x^2+y^2=5$. Por consiguiente, la ecuación tiene las 9 siguientes soluciones: $x=y=0$, $x=\pm 2, y=\pm 1$, $x=\pm 1, y=\pm 2$.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Problema 7

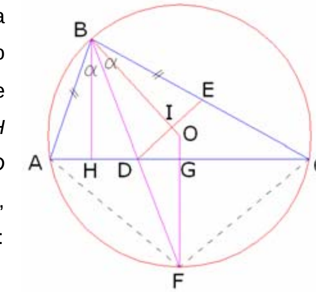


Sea *ABC* un triángulo con $BC \geq AB$. Se toman *D* y *E* sobre *AC* y *BC* respectivamente de modo que $\angle ABD = \angle DBC$ y $BE=AB$. Sea *O* el centro del círculo circunscrito de *ABC*. Demostrar que *DE* y *BO* son perpendiculares.

Fuente: Club France-2001-2002, dossier 4, solutions- Exercice 2

Solución

Sea *F* el punto de intersección de *BD* con el círculo circunscrito de *ABC* (*F* está en la prolongación de BD), ya que $D \in AC$). Por otro lado: $\angle ABF = \angle FBC$, y por lo tanto los arcos *AF* y *FC* son iguales, y se deduce que $AF=CF$ y $OF \perp AC$. Sea *G* la intersección de *FO* y *AC*, y *H* sobre *AC* es el pie de la altura de *B*. Los triángulos *ABD* y *EBD* son semejantes: en efecto $AB=BE$, $\angle ABD = \angle DBC$, y el lado *BD* es común. Así: $\angle ADB = \angle EDB...(*)$



Por otro lado, $\angle HBD = \angle DBO....(**)$ $BH \parallel FG$ donde $\angle HBD = \angle OFB$. Mas el triángulo *OFB* es isósceles en *O* donde: $\angle HBD = \angle DBO....(**)$

Sea finalmente *I* la intersección de *DE* y *BO*. Los triángulos *BHD* y *DIB* son semejantes: con *BD* común, $\angle HDB = \angle IDB$ por la relación (*), y $\angle DBH = \angle DBI$ por (**). Donde $\frac{\pi}{2} = \angle DHB = \angle DIB$, de aquí el resultado es obvio.

Solución: Los proponentes y traducción del francés por Aldo Gil C.

Problema 8

Tenemos una hoja de papel. Esta permitido romperla en 8 partes o en 12. Cada nueva parte está permitido romperla en 8 o 12 partes y así se puede seguir.

1. ¿Es posible obtener 60 partes?
2. ¿Es posible obtener 2002 partes?
3. ¿Es posible obtener 2003 partes?
4. ¿Es posible obtener 2007partes?

Fuente: Propuesto por SL Lista Snack- Junio 2007

Solución

De cada vez, aumentamos el número de partes en 7 ú 11. Por tanto, para la 1ª pregunta, se trata de saber si 59 se puede obtener como suma repetida de 7 y 11. Pero esto no es posible, pues las diferencias entre 59 y los múltiplos de 11 menores son 4, 15, 26, 37 y 48, ninguna de las cuales es múltiplo de 7.

La respuesta a las siguientes es afirmativa. En general, *N* se puede escribir como $N = a.p + b.q$, con $MCD\ (p,\ q) = 1$ y $a,\ b > 0$, siempre que $N \geq (p-1)(q-1)$. En este caso, para cualquier *N* mayor que, justamente 6.10 = 60.

Por tanto, la respuesta sería afirmativa para cualquier número mayor o igual que 61 (y para la mitad de los menores que 60).

Solución: Ignacio Larrosa Cañestro

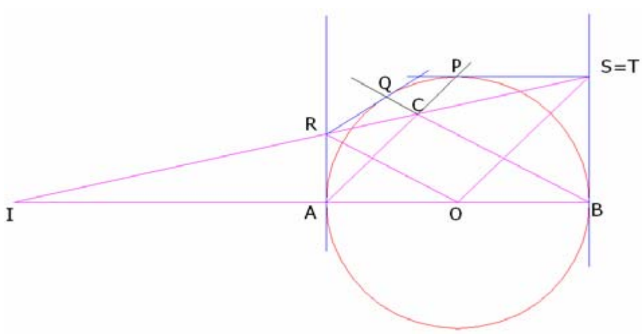
Problema 9

Sea *ABC* un triángulo con los ángulos *A* y *B* agudos. Se traza un círculo de diámetro *AB*, y se prolongan *AC* y *BC* los cuales se cortan en *P* y *Q* respectivamente en la circunferencia. Las tangentes en *A* y *Q* se cortan en *R*, y las tangentes en *B* y *P* se cortan en *S*. Probar que *RS* pasa por *C*.

Fuente: Corrige de l´envoi 1-2003/2004-France.

Solución

Sea *O* la mitad de *AB*, y a su vez centro del círculo. Como *S* esta a igual distancia de *P* y *B* (*OSP* y *OSB* son semejantes), la recta *OS* es la mediatriz de *PB*. En particular es perpendicular a *PB*. Como el triángulo *APB* es rectángulo en *P*, *PB* es perpendicular a *AC*. Por consiguiente *OS* es paralela a *AC*. De la misma forma *OR* es paralela a *BC*. La figura como se muestra arriba:



Trazamos *I* y *T* puntos de intersección de *CR* con *AB* y *OS* respectivamente.

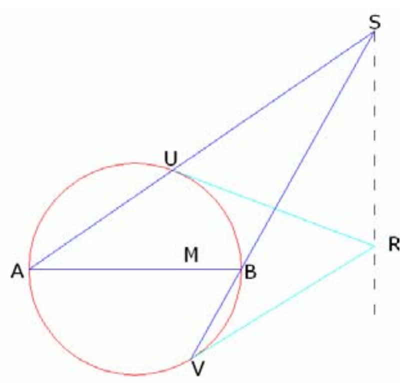
Queremos mostrar que *T=S*, ó que *T* pertenece a *BS*.

Es suficiente probar que *BT* y *AR* son paralelas. En efecto, en aplicación del teorema de Thales en los triángulos semejantes *IAC* é *IOT* por una parte, *IOR* é *IBC* por otro lado, tenemos:

$\frac{IA}{IO} = \frac{IC}{IT}$ y $\frac{IO}{IB} = \frac{IR}{IC}$. Multiplicando las relaciones se obtiene: $\frac{IA}{IB} = \frac{IR}{IT}$, de aquí resulta que *BT* y *AR* son paralelas, y por lo tanto *R,C* y *S* son colineales.

Solución: Los proponentes y traducción del francés por Aldo Gil C.

Problema 10



Sea *AB* el diámetro de una circunferencia. Se toman *U* y *V* en la circunferencia y *R* el punto de intersección de las tangentes a *U* y *V*. Sea *S* la intersección de la recta que pasa por *A* y *U*, y las que pasan por *B* y *V*. Demostrar que la recta que pasa por *R* y *S* es perpendicular al diámetro *AB*.

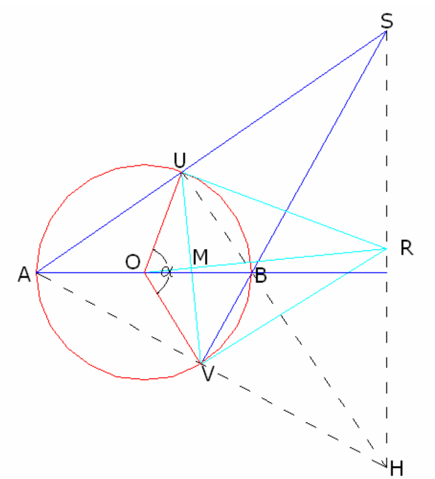
Fuente: II Forum Matematico delle Olimpiadi-Italia-30 Abril 2007

Solución

VA y *UB* son alturas del triángulo *ABS* por ser triángulos rectángulos y se interceptan en *H*. *O* es el centro del círculo, *OR* y *UV* se cortan en *M* que es el punto medio de *UV* por ser el punto de intersección de un romboide. *UHVS* y *UOVR* son cuadriláteros cíclicos. $\angle UOV = \alpha$.

En el triángulo *UVS* tenemos:

$r = \dfrac{UV}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = UR = RV$. Entonces R



es el centro de la circunferencia circunscrita a *UHVS* y por lo tanto *SH* es la altura de *ABS*.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Con esto hemos concluido nuestro número 49, y pues el que viene es especial, pues es nuestro número 50, y caray estoy orgulloso de haber llegado tan lejos, y seguramente habremos de llegar más lejos aun.

Ahora deambulando por la memoria, no se porque decimos que llegar a los 25, 50, 100 etc., es un número para celebrar o algo así, que nos han hecho los otros números para merecer semejante desprecio, ¿alguien me lo podría explicar?

¿Por qué esa discriminación?, no me parece correcto que si el sistema (no el de base diez u otro), sino el de los poderosos discriminan a los mas pobres, o a los que no pertenecen a sus creencias políticas y religiosas, o tiene un color distinto al que ellos creen que debe ser superior, tengamos que hacer lo mismo con los números.

NO A LA DISCRIMINACION!!! Todos los números son iguales, más grandes o más pequeños cuantitativamente pero del mismo grado cualitativo. ¿O estoy loco?

Saludos, con una camisa de fuerza

Aldo Gil C.