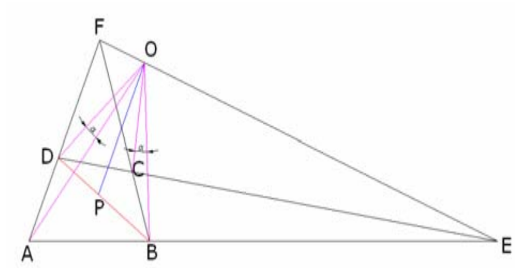
Problema 1



Sean *E* y *F* las intersecciones de los lados opuestos de un cuadrilátero convexo *ABCD*. Las diagonales se cortan en *P*. Sea *O* el pie de la perpendicular de *P* a *EF*. Demostrar que: $\angle BOC = \angle AOD$.

Fuente: Aparecido en Mathlinks-Chinese TST 2002,

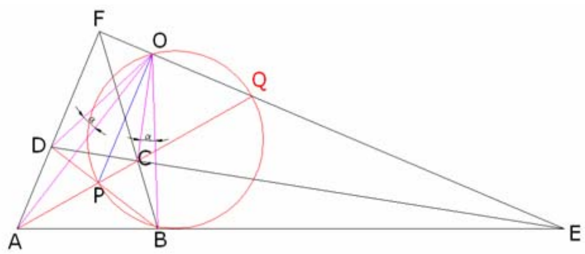
Solución:

En la figura, *E* es la unión de *AB* con *CD*, y *F* la unión de *AD* con *BC*. Prolongamos *CA* hasta cortar a *EF* en *Q*.

Lema: *OP* biseca el $\angle AOC$.

1. Por el teorema de Menelao en el triángulo *ACF* con respecto a los puntos *P, B, D* (claramente colineales),

$$\frac{AP}{PC}\cdot\frac{CB}{BF}\cdot\frac{FD}{DA}=1.$$



2. Por el teorema de Ceva en el triángulo *ACF* con respecto a las cevianas *AB, CD, FQ* (concurrentes en E),

$$\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CB}{BF}\cdot\frac{FD}{DA}=1.$$

3. De (1) y (2), $\frac{PA}{PC}=\frac{QA}{QC}$, lo cual implica que *P, Q* están en el circulo de Apolonio de *A, C* con la relación $k = \frac{PA}{PC}=\frac{QA}{QC}$.

[Me estoy refiriendo a la ubicación del lugar geométrico de todos los puntos *X* tales que $\frac{XA}{XB}=k$, es una constante.]

Desde que *P,Q* están en *AC*, *PQ* debe ser el diámetro de este círculo.

4. Como $\angle QOP = 90º$, *O* esta en este circulo. Así: $\frac{OA}{OC}=k=\frac{PA}{PC}$. Por el teorema de la bisectriz, $\angle AOP = \angle POC$.

En forma similar por extensión *DB* corta a *EF* en *Q'*, y siguiendo el mismo procedimiento, demostramos que $\angle DOP = \angle POB$. De aquí: $\angle DOA = \angle DOP - \angle AOP = \angle POB - \angle POC = \angle COB$.

Nota del traductor: si quieres una referencia del circulo de Apolonio, te sugiero la siguiente link, del Francisco García Capitán http://garciacapitan.auna.com/bella/htm/circapol.htm, es buena.

Solución: Mathlinks y traducción de Aldo Gil

Problema 2

Si *n* es un número positivo tal que *2n* tiene 28 divisores positivos; *3n* tiene 30 divisores positivos, ¿cuantos divisores tiene *6n*?

Fuente: AHSME 1996-Problema 29

Solución:

El camino que yo veo, es encontrar las factorizaciones de 28 y 30 tales que $28=a.(b+1).c$ y $30=a.b.(c+1)$. Una de ellas es 28=1.7.4 y 30=1.6.5. Ahora usamos la conocida fórmula del número de factores de un número $n=p_1^{e1}.p_2^{e2}.p_3^{e3}...$ es $(e_1+1)(e_2+1)(e_3+1)...$ Esto es *2n* tiene 7.4 factores, así *2n* es $2^6.3^3$, y *3n* es $2^5.3^4$, y *6n* es $2^6.3^4$, la cual tiene 35 factores. A menos que yo hice algo malo, no hay otro valor de *n* que $2^5.3^3$ el cual satisface la condición del problema.

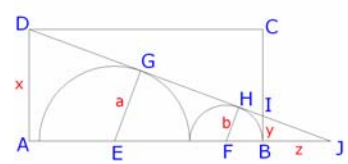
Solución: Mathlinks y traducción de Aldo Gil

Problema 3

Dados dos semicírculos, C_a y C_b de radios distintos, *a* y *b*, y un rectángulo *ABCD* es tal que los diámetros de los semicírculos están sobre la base como se muestra, y la tangente común de los semicírculos pasa por el vértice *D* del rectángulo. Hallar en función de *a* y *b* la relación en la cual la tangente común divide el lado *BC*.

Fuente: Propuesto por Catherine Shevlin, England-Crux-Mathematicorum-Problema 2550

Solución



Sean C_a y C_b los semicírculos que contienen los puntos *A* y *B*, respectivamente, sean *E* y *F* los centros de C_a y C_b, respectivamente, y sean *G* y *H* los puntos de tangencia de C_a y C_b con la tangente común, respectivamente. Sea *I* la intersección de la tangente común con *CB*, y sea *J* la intersección de las prolongaciones de *DI* y *AB*. En consecuencia DJ es tangente a los semicírculos, tenemos: $\angle EGJ=\angle FHJ=90º$. De aquí: $\Delta ADJ \approx \Delta BIJ$ y $\Delta GEJ \approx \Delta HFJ$. Sean x,y y z las longitudes de DA, IB y BJ, respectivamente. Usando proporcionalidad de los lados de los triángulos, tenemos: $\frac{y}{x}=\frac{z}{2a+2b+z}$ y $\frac{a}{b}=\frac{a+2b+z}{b+z}$, eliminando z resulta: $\frac{y}{x}=\frac{b^2}{a^2}$.

Solución: Jesse Crawford, San Angelo USA – Crux Mathematicorum con traducción de Aldo Gil

Problema 4

En un triángulo ABC, AD es la bisectriz (D esta en BC) si $AB+AD=CD$ y $AC+AD=BC$, cuales son los ángulos del triángulo ABC?

Fuente: Aparecido en Mathlinks-Iran 2002,

Solución:

Primero, para el triángulo ABC tenemos $B=2C \Leftrightarrow b^2=c^2+ca$. (Esto puede ser fácilmente probado). Regresando a nuestro problema $AB+AD=CD$ y $AC+AD=BC \Leftrightarrow b^2 + bc +$

$2bc\cos\frac{A}{2} = ab+ac$ ....(1)

$bc + c^2 + 2bc\cos\frac{A}{2} = ab$......... (2)

De (1)-(2) tenemos: $b^2=c^2+ca \Leftrightarrow B=2C$ podemos escribir (1) de otra forma (1) $\Leftrightarrow$ $2bc\cos\frac{A}{2} = (a-b)(b+c) \Leftrightarrow \sin A\sin B\sin C = (\sin A - \sin B)(\sin A + \sin B)\sin\frac{A}{2} \Leftrightarrow \sin A\sin B\sin C$ $=4.\cos\frac{A+B}{2}.\,\text{sen}\frac{A-B}{2}.\,\text{sen}\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}.\sin\frac{A}{2}=4\,\text{sen}\frac{C}{2}.\,\text{sen}\frac{A-B}{2}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}.$ $\sin\frac{A}{2}$ (debido a que $B = 2C$) $\Leftrightarrow \text{sen}\frac{A-B}{2} = \sin B \Leftrightarrow A=3B$ también tenemos $B=2C$.

Luego $A=120º$; $B=40º$ $C=20º$

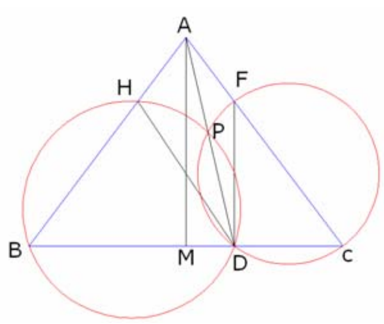
Solución: Mathlinks y traducción de Aldo Gil

Problema 5

Sea ABC un triángulo isósceles con $AB=AC$. Sea D un punto en BC tal que $BD=2DC$. En AD tomamos un punto P tal que el ángulo $\angle BPD=\angle A$. Probar que $\angle A=2\angle DPC$.

Fuente: Propuesto en MathLinks, tomado de Turkey 1999.

Solución:



Tomamos el punto H en AB tal que: $AH=\frac{AB}{3}$.

$\frac{AH}{AB}=\frac{DC}{BC} \Rightarrow HD\,//\,AC$, de aquí: $\angle BHD=\angle A \Rightarrow$ $\angle BHD=\angle BPD$. En consecuencia H,P están en el mismo lado de BC, y tenemos que B,D,P,H son cíclicos. Sea C_1 el circuncírculo de $BDPH$. Ahora trazamos una perpendicular DF a BC, donde F pertenece a AC. Si M es el punto medio de BC, entonces $MD=\frac{MC}{3}$, y de las líneas paralelas AM, y DF tenemos que $AF=\frac{AC}{3}$, también $\angle DFC=\frac{1}{2}\angle A$. Ahora construimos el circulo C_2 con diámetro CF. $\angle CDF=90º \Rightarrow D\in C_2$. La potencia de A con respecto a C_1 y C_2 respectivamente es $AH.AB$ y $AF.AC$. pero $AH=AF$ y $AB=AC \Rightarrow$ A esta en el eje radical de C_1 y C_2. Tenemos también que: $D\in C_1\cap C_2$. Así el eje radical es la línea AD. Pero $P\in D$ y $P\in C_1 \Rightarrow P\in C_2$. Así F,P,D,C son cíclicos, de aquí el segmento DC es mostrado bajo ángulos iguales de P y F, esto es $\angle DPC=\angle DFC=\frac{1}{2}\angle A$.

Solución: MathLinks – Pontios y traducción de Aldo Gil

Problema 6

En un triángulo ABC, $AB=AC$. Un punto P en el plano satisface $\angle ABP=\angle ACP$. Demostrar que P esta en BC ó en la mediatriz de BC.

Fuente: Excalibur volumen 12-Número 1-Marzo-Abril 2007

Solución

Aplicando la ley de senos a los triángulos ABP y ACP, tenemos: $\text{sen}\,\angle APB=\frac{AB\,\text{sen}\angle ABP}{AP}=\frac{AC\,\text{sen}\angle ACP}{AP}=\text{sen}\,\angle APC$. Esto es, o $\angle APB=\angle APC$, ó $\angle APB+\angle APC=180º$. El primer caso implica que $\Delta ABP\cong\Delta ACP$, por lo que $BP=CP$ y P esta en la mediatriz de BC. El segundo caso implica que P esta sobre BC.

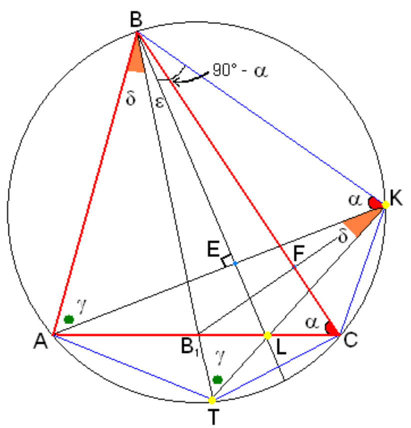
Solución: K.K.Kwok Aparecido en Excalibur volumen 12-Número 1-Marzo-Abril 2007-Traducción por Aldo Gil.

Problema 7

En un triángulo acutángulo *ABC* llamamos BB_1 a una de sus bisectrices. Sea ahora K el punto en el cual la perpendicular a *BC* por B_1 encuentra al arco menor *BC* de la circunferencia circunscrita. Sea *L* la intersección de la perpendicular de *AK* por *B* en *AC*. Sea *T* la intersección de la bisectriz de *B* con el circunradio. Demostrar que *L*,*K*,*T* son colineales.

Fuente: Mathlinks Italiano-Lun Mag 07, 2007

Solución:



Llamamos:

E a la intersección de *AK* y *BL*

F la intersección de *BC* y B_1K

Y con un poco de observación busco los ángulos congruentes en la circunferencia, con el mismo arco y entonces: $\angle BKA = \angle BCA = \alpha$ porque subtienden el mismo arco *AB* de aquí, porque *BEK* y B_1FC son triángulos rectángulos, entonces: $\angle EBK = \angle FB_1C = 90º - \alpha$

- $\angle CAK = \angle CBK = \beta$ porque subtienden el mismo arco *KC*;
- $\angle BAK = \angle BTK = \angle BCK = \gamma$ porque subtienden el mismo arco *BK*;
- $\angle ABT = \angle AKYT = \angle ACT = \delta$ porque subtienden el mismo arco AT;
- $\angle TBC = \angle TKC = \angle TAC$ porque subtienden el mismo arco TC;

Pero $\angle ABT = \angle TBC$ por construcción, entonces

$\angle ABT = \angle AKT = \angle ACT = \angle TBC = \angle TKC = \angle TAC = \delta$

Ahora, *L*,*K*,*T* alineados implica que $\angle BLT + \angle BLK = 180º$ y es lo que habría que demostrar. Considero el triángulo *BLT* y puesto que $\angle TBL = \varepsilon$, tenemos: $\angle BLT = 180º'(\gamma + \varepsilon)$. Considerando el triángulo *BLK*:

$\angle BLK = 180º - (90º - \alpha + \alpha + \delta) = 180º - (90º + \delta)$

Sumamos $\angle BLT$ y $\angle BLK$:

$\angle BLT + \angle BLK = 180º - (\gamma + \varepsilon) + 180º - (90º + \delta) = 180º - \gamma - \varepsilon + 180º - 90 - \delta$
$= 270º - (\gamma + \delta + \varepsilon)$, mas, considerando el triángulo rectángulo *BEA* observo que : $\gamma + \delta + \varepsilon = 90º$ y concluyo que: $\angle BLT + \angle BLK = 180º \Rightarrow L, K, T$ están alineados.

Solución: Mathlinks, con traducción de Aldo Gil

Problema 8

Encontrar todas las soluciones reales de la ecuación: $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$.

Fuente: Propuesto por Sefket Arslanagi, Germany, - Crux Marhematicorum-Problema 2150.

Solución:

Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación y simplificando obtenemos: $-x = 4x(2x^2 - 1)\sqrt{1-x^2}$ ....(*I*)

Claramente $x=0$ no es una solución. De (*I*) obtenemos: $-1 = 4(2x^2 - 1)\sqrt{1-x^2}$ ...(*II*)

Sea $y = \sqrt{1-x^2}$. Entonces (*II*) se convierte en: $8y^3-4y=0$, ó $(2y+1)(4y^2-2y-1)=0$.

En consecuencia y es positivo, $y = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ y $x = \pm\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$. Para el valor negativo de *x*, ambos $2x^2-1$ y $2x.\sqrt{1-x^2}$ son negativos y no puede ser una solución. Para $0 \le x \le 1$ la función contínua $\sqrt{1-x} - (2x^2 - 1) + 2x\sqrt{1-x^2}$, es positiva cuando x=0 y negativa cuando x=1. Así la función desaparece al menos una vez en el intervalo [0,1]. Concluimos que la única solución de l ecuación es: $x = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Solución: Kee-Wai Lau Hong Kong, con traducción de Aldo Gil

Problema 9

Resolver la ecuación: $tg2x+2cosx=0$

Fuente: Desconocida.

Solución:

PASO 1: Pones $tg\ 2x = \dfrac{sen2x}{cos\,2x}$.

PASO 2: debes saber que $sen(2x)=2sen(x)cos(x)$ y que $cos\ 2x=cos^2x-sen^2x$

PASO 3: ya tenemos la ecuación escrita del siguiente modo: $\dfrac{2sen\ x.cos\ x}{cos^2x-sen^2x} + 2.cos\,x = 0$

<u>PASO 4:</u> Quitamos denominadores, y nos queda: $2sen\,x.cos\,x + 2cos^3(x) - 2sen^2\,x.cos\,x = 0$

<u>PASO 5:</u> sacamos factor común el coseno: $cos\,x.(2sen\,x + cos^2x - 2sen^2\,x) = 0$

<u>PASO 6:</u> de aquí sacamos la primera solución, en las que $cos\,x=0$, esto es $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi.k$, para todo *k* perteneciente a *Z.*

<u>PASO 7:</u> hallamos las raíces de lo que hay dentro del paréntesis para intentar buscar más soluciones ... manos a la obra: $2sen\,x + cos^2x - 2sen^2\,x = 0$

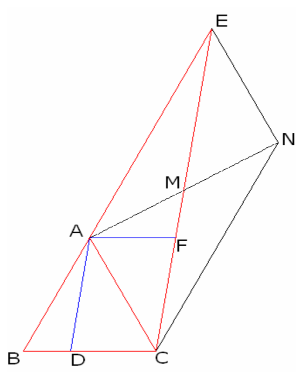
<u>PASO 8:</u> esto es una putada pisha, al final te queda una ecuación de grado 4º grado en *sen(x)* ... vaya papeleta (lo estoy haciendo de coco posiblemente esté equivocado) la siguiente ecuación según mis cálculos (haces el cambio $cos\,x = \sqrt{1-sen^2x}$: $4sen^4x - 8sen^3x + 5sen^2x - 1 = 0$

<u>PASO 9:</u> aunque parezca complicada la ecuación ... a ojo de buen cubero vemos que si sen(x)=1 se cumple la ecuación anterior ... MILAGRO! esto ocurre cuándo $x = \frac{\pi}{2} + 2\cdot\pi\cdot k$, para todo *k* perteneciente a Z

<u>PASO 10:</u> agrupamos las soluciones y escribimos las que hemos encontrado ... tan solo $x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$, para todo *k* en *Z.*

es correcto no? insisto ... lo he hecho sobre la marcha. UN SALUDO

<u>Problema 10</u>



ABC es un triángulo isósceles donde *AB=AC* y $\angle A<90º$. Sea *D* un punto en *BC*. Trazar *CE* paralelo a *AD* cortando a la prolongación de *AB* en *E.* Probar que *CE>2CD*.

Fuente: Mathematical Crux– Problema 1516 propuesto por Toshio Seimiya-Japón-1991

<u>Solución</u>

Trazamos *AF* paralela a *BC* tal que *AF=CD*. Trazamos *AM=MN* donde *M* es el punto medio de *CE*. Entonces *AENC* es un paralelogramo. Como $\angle A<90º$ en consecuencia $\angle EAC$ es obtuso. Esto es que *CE>AN=2AM*. También *AM* ≥ *AF*, luego la mediana es ≥ que la bisec-

triz trazada desde el mismo vértice. Hemos demostrado la dura desigualdad *CE≥2AM≥2AF=2CD*.

Solución: Resuelto por Jack Garfunkel, Nueva York, con traducción de Aldo Gil

---

Bueno amigos, no hay mucho que decir, que nos acercamos peligrosamente al número 50, vaya que no pensé llegar tan lejos.

Si que soy empeñoso eh?

Un abrazo

Aldo Gil

<u>MACCHU PICCHU la nueva cuarta maravilla del mundo</u>