

Problema 1

Sea P un punto interior en $\triangle ABC$ tal que $\angle APB - \angle C = \angle APC - \angle B$. Sean D, E los incentros de los triángulos $\triangle APB, \triangle APC$ respectivamente. Demostrar que AP, BD y CE se cortan en un punto.

Solución

Lema: Sean X, Y, Z los pies de las perpendiculares de P a BC, CA y AB respectivamente. Entonces:

- (i) $YZ = PA \operatorname{sen} A$
- (ii) $\angle YXZ = \angle BPC - \angle A$.

Esto es fácil de ver mediante si examinamos los tres cuadriláteros cíclicos $AZPY, BXPZ$ y $CYPX$.

Sean BD y CE que cortan AP en Q y R respectivamente. Por el teorema del ángulo bisectriz $\frac{AQ}{AP} = \frac{AB}{BP}$ y $\frac{AR}{AP} = \frac{AC}{CP}$. Para demostrar que Q, R coinciden, es suficiente

demostrar que $\frac{AP}{BP} = \frac{AC}{CP}$. Ahora, $\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CP} \Leftrightarrow AB \cdot CP = AC \cdot BP \Leftrightarrow CP \cdot \operatorname{sen} C = BP \cdot \operatorname{sen} B$

$\Leftrightarrow XY = YZ$ (usando el lema).

Pero tomamos $\angle APB - \angle C = \angle APC - \angle B$. Esto implica que $\angle XZY = \angle XYZ$ (También por el lema), entonces $XY = XZ$ tal como se quería.

Problema 2

Encontrar todos los pares (a, b) tales que a y b sean números enteros y $a^2 + ab + b^2$ es un múltiplo de 7^5 .

Fuente: *International Hungarian Mathematics Competition, Solutions for exercises "A" in October, 2000 A.300*

Solución

Considerar las siguientes identidades:

$(x-2y)(2x-y) = 2(x^2 + xy + y^2) - 7 \cdot xy$;

$(x-18y)(18x-y) = 18(x^2 + xy + y^2) - 7^3 \cdot xy$;

$(x-1353y)(1353x-y) = 1353(x^2 + xy + y^2) - 109 \cdot 7^5 \cdot xy$.

Se deduce que $a^2 + ab + b^2$ es solo divisible por 7^5 si se cumple cualquiera de estas ecuaciones:

- a y b son ambos divisibles por 7^3 ;

- $a = 7^2 p, b = 7^2 q$, donde $p \equiv 2q \pmod{7}$ ó $q \equiv 2p \pmod{7}$;
- $a = 7p, b = 7q$, donde $p \equiv 18q \pmod{7^3}$ ó $q \equiv 18p \pmod{7^3}$;
- $a \equiv 1353b \pmod{7^5}$ ó $b \equiv 1353a \pmod{7^5}$.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

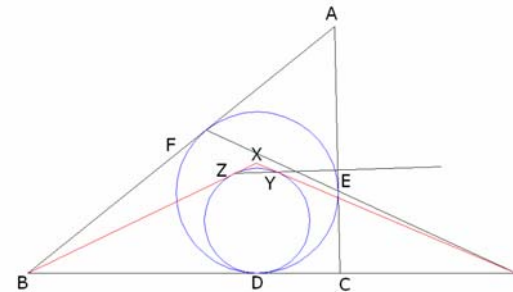
Problema 3

El incírculo de ABC toca a BC, CA y AB en D, E y F respectivamente. X es un punto interior a ABC tal que el incírculo de XBC toca a BC en D también, y a CX y XB en Y y Z respectivamente. Probar que $EFZY$ es un cuadrilátero cíclico.

Fuente: *Lista corta de problemas 36 OIM-Canadá 1995- Problema 3-Geometría*

Solución:

Si EF paralela a BC , entonces $AB=AC$ y AD es un eje de simetría de $EFZY$. De aquí, el cuadrilátero es cíclico. Si EF no es paralelo a BC , podemos asumir que las prolongaciones



de BC y EF se cortan en P . Por el teorema de Menelao.

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CE}{EA} = -1$$

Desde que:

$BZ=BD=BF, CY=CD=CE$ y

$$\frac{AF}{EA} = 1 = \frac{XZ}{YX}, \frac{XZ}{ZB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CY}{YX} = -1$$

Por conversión del teorema de

Menelao, Z, Y y P son colineales. Luego: $PE \cdot PF = PD^2 = PY \cdot PZ$. De aquí $EFZY$ es un cuadrilátero cíclico.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil.

Problema 4

Resolver la ecuación $[x/2] + [x/4] = x$. ($[x]$ denota el mayor entero no mayor que x .)

Fuente: *International Hungarian Mathematics Competition, Solutions for exercises "C" in October, 2000 C.688*

Solución

Sea $y = \frac{x}{4}$, entonces $[2y] + [y] = 4y$. De aquí vemos que $[2y] \leq 2y$ y $[y] \leq y$ y que $4y = [2y] + [y] \leq 2y + y = 3y$, $y \leq 0$. Sea $y = -n+r$, donde $n \geq 0$ es un entero y $0 \leq r < 1$. Entonces $2y = -2n+2r$, de aquí $-2n+[2r] - n = -4n+4r$, esto es que $n+[2r] = 4r$ es un entero. Los posibles valores de r son entonces $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$. Los correspondientes valores de $[2r]$ son $0, 0, 1, 1$, respectivamente; de aquí los valores $0, 1, 1, 2$ son obtenidos para $n=4r-[2r]$. Así $y = -n+r = 0, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, \text{ ó } -\frac{5}{4}$, y las soluciones son $x=4y=0, -3, -2, -5$.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

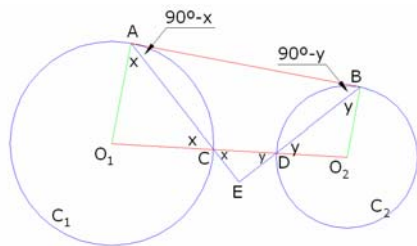
Problema 5

Se toman dos círculos disjuntos C_1 y C_2 con centros O_1 y O_2 . La tangente común toca a los círculos C_1 y C_2 en A y B respectivamente. El segmento O_1O_2 corta a C_1 y C_2 en C y D respectivamente. Probar que:

- a) Los puntos A, B, C y D son concíclicos
- b) Las líneas AC y BD son perpendiculares.

Fuente: Propuesto por Republic of Moldova XL Math. Olymp. 1996-11-12 Form-prob 3

Solución:



a) Sean x e y los ángulos de base en los triángulos isósceles AO_1C y BO_2D respectivamente, la suma de los ángulos en el cuadrilátero $ABCD$ es: $(90^\circ-x) + (90^\circ-y) + (180^\circ-y) + (180^\circ-x) = 360^\circ$.

Y tenemos: $x+y=90^\circ$(I).

De aquí, en $ABCD$, los ángulos A y D se vuelven: $(90^\circ-x) + (180^\circ-y) = 270^\circ - (x+y) = 270^\circ - 90^\circ = 180^\circ$. Por lo tanto: $ABCD$ es cíclico. Esto prueba (a).

b) Sea E la intersección de AC y BD . De la ecuación (I), se deduce que CEB es un triángulo rectángulo, luego AC y BD son perpendiculares.

Solución: Amengual Covas, Mallorca España.

Problema 6

Un cono y un cilindro tienen igual altura e igual volumen. Encuentre el ángulo del cono con la base, si las áreas de las superficies laterales también son iguales.

Fuente: International Hungarian Mathematics Competition, Solutions for exercises "C" in January, 2002 C.657

Solución

El cono es claramente un cono circular recto. Sea m la altura común del cono y el cilindro, sean r y R los radios de las bases del cono y el cilindro respectivamente. Sea a la altura inclinado del cono y sea 2α su ángulo de inclinación. Desde que los volúmenes son iguales, $\frac{r^2 \pi m}{3} = R^2 \pi m$, de aquí $\frac{r}{R} = \sqrt{3}$. Desde que las áreas laterales son iguales $\pi r a = 2R \pi m$, se deduce que $\cos \alpha = m/a = r/2R$. Con este resultado tenemos $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$. De aquí $2\alpha = 60^\circ$. El ángulo de inclinación del cono es 60° .

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Problema 7

Sea a, b, c enteros positivos de números reales tales que: $abc=1$. Probar que:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Fuente: Lista corta de problemas 36 OIM-Canadá 1995- Problema 1-Algebra

Solución

Sea $S = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$, y definamos $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ y

$$T = x+y+z.$$

Los enteros reales positivos x, y, z satisfacen que $x \cdot y \cdot z = 1$. Entonces

$$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{x^3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{z}} = \frac{x^3 y z}{y+z} = \frac{x^2}{T-x} = \frac{T^2 - (t^2 - x^2)}{T-x}$$

$$\text{tes en } y \text{ y } z \text{ resulta: } S = T^2 \left(\frac{1}{T-x} + \frac{1}{T-y} + \frac{1}{T-z} \right) - 4T$$

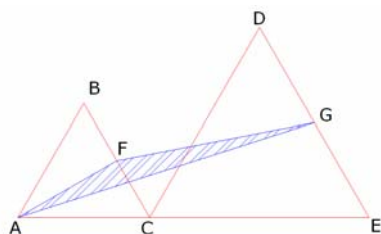
Por la inecuación de la media aritmética-armónica.

$$S \geq T^2 \cdot \frac{9}{(T-x) + (T-y) + (T-z)} - 4T = \frac{9T}{2} - 4T = \frac{x+y+z}{2}$$

Por la inecuación de la media aritmética-geométrica: $S \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}$. La igualdad ocurre si y solo si $x=y=z=1$, lo cual es equivalente a $a=b=c=1$.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil.

Problema 8



En la figura, C es un punto en AE. Los triángulos ABC y CDE son equiláteros. F y G son los puntos medios de BC y DE respectivamente. Si el área del triángulo ABC es 24 cm^2 , el área del triángulo CDE es 60 cm^2 , encontrar el área del triángulo AFG.

Fuente: Excalibur volumen 12-Número 1-Marzo-Abril 2007

Solución

Esta pregunta es bastante fácil y puede ser resuelta de diferentes maneras. Una de ellas es reconocer que las prolongaciones de AF y CG son paralelas (parten de un vértice y tocan el punto medio del lado opuesto). Esto es que las áreas de AFC y AFG son iguales.

Solución: K.K.Kwok Aparecido en Excalibur volumen 12-Número 1-Marzo-Abril 2007-Traducción por Aldo Gil.

Problema 9

¿Cuántos ángulos agudos α existen tales que $\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha = \frac{1}{8}$?

Fuente: Mathematical Olympiads' Correspondence Program - 1997-1998- Problem 4-Set 1

Solución

$$8 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha = 4 \sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha = 2 \sin 4\alpha \cos 4\alpha = \sin 8\alpha$$

La ecuación dada es equivalente a: $\sin 8\alpha = \sin \alpha$ con $\sin \alpha \neq 0$. De aquí, debemos tener $\alpha + 8\alpha = \pi$, $8\alpha = 2\pi + \alpha$ o $8\alpha = 3\pi - \alpha$, luego α esta estrictamente entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Esto lleva respectivamente a: $\alpha = \frac{\pi}{9}$ (20°), $\alpha = \frac{2\pi}{7}$ y $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (60°). Esto es que existen tres ángulos agudos α donde se cumple la igualdad.

Comentario. Alternativamente, notar que $0 = \sin 8\alpha - \sin \alpha = 2 \sin \frac{7\alpha}{2} \cos \frac{9\alpha}{2}$; de donde

$$7\alpha = 2\pi \text{ ó } 9\alpha = \pi \text{ ó } 3\pi.$$

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Problema 10

Cerramos este número, donde no me podrán acusar de palabrero, con este problemita, que tiene una solución fantástica. Disfrútala!!!!!!

Si a, b y c son las raíces de $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$, encontrar $a+b+c$ y $a^2 + b^2 + c^2$.

Fuente: The Twentieth W.J.Blundom Mathematics Contest-2003-Problema 5

Solución

Si a, b y c son las raíces de la ecuación cúbica, entonces: $x^3 - x^2 + x - 2 = (x-a)(x-b)(x-c)$
 $= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc.$

Igualando los coeficientes en x^2 , tenemos: $a+b+c=1$.

Elevando al cuadrado tenemos: $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) = 1$.

Pero los coeficientes de x en la ecuación, nos da: $ab+ac+bc=1$. Luego efectuando: $a^2 + b^2 + c^2 = -1$.

A la memoria de los fallecidos en el terremoto de Pisco-Perú el 15 de Agosto del 2007

Aldo Gil Crisóstomo