Problema 1

Para cualquier triángulo *ABC* encontrar el valor exacto de: $\sum_{ciclico} \frac{\cos A + \cos B}{1 + \cos A + \cos B - \cos C}$

Fuente: Propuesto por Aram Tangboondouangjit, USA-Mathematicorum-Problema 2544-2001

Solución:

De: $\frac{\cos A + \cos B}{senA + senB} = \frac{2\cos\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}{2sen\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}} = \cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan\left(\frac{C}{2}\right)$

Así conseguimos: *cos A+cos B=(sen A+sen B).tan*$\left(\frac{C}{2}\right)$

En consecuencia: *1-cos C=2sen2*$\left(\frac{C}{2}\right)$*=senC.tan*$\left(\frac{C}{2}\right)$ y *tan*$\left(\frac{C}{2}\right)\neq 0$, la suma dada se vuelve: $\sum_{ciclico} \frac{\cos A + \cos B}{1 + \cos A + \cos B - \cos C} = 2$

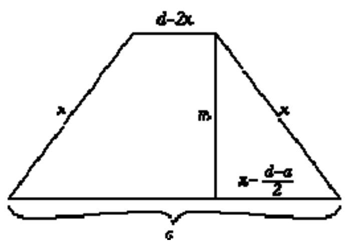
Solución: Nikolaos Dergiades, Greece

Problema 2

En un trapecio cíclico, *a* y *d* son la longitudes de una base y la suma de las longitudes de los otros tres lados. Dados *a* y *d*, determinar los lados del trapecio para el área máxima del trapecio.

Fuente: International Hungarian Mathematics Competition, Solutions for problems "C", 2000-Proposed C.594

Solución



El trapecio existe solo si *d>a*. Sea *x* la longitud de los lados del trapecio; entonces la longitud de la otra base es *d-2x* $(0<x<\frac{d}{2})$.

Por el teorema de Pitágoras, la altura del trapecio es:

$$m = \sqrt{x^2 - \left(x - \frac{d-a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{d-a}\sqrt{4x-d+a}$$

y el área es:

$$T = \frac{a+(d-2x)}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{d-a\sqrt{4x-d+a}} = \frac{1}{4}.\sqrt{d-a}(a+d-2x)\sqrt{4x-d+a}$$

Tenemos que encontrar el máximo valor de: $f(x) = (a+d-2x)\sqrt{4x-d+a}$. La primera derivada de *f* es: $f'(x) = -2\sqrt{4x-d+a} + \frac{4(a+d-2x)}{2\sqrt{4x-d+a}} = \frac{-12x+4d}{\sqrt{4x-d+a}}$

Si $0<x<\frac{d}{3}$ entonces *f'(x)>0*, así *f* es creciente.

Si $d/3<x<\frac{d}{2}$ entonces *f'(x)<0*, así *f(x)* es decreciente. El máximo es cuando $x=\frac{d}{3}$.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Problema 3

Supongamos que *a,b* y *c* son enteros reales positivos. Probar que:

$$\frac{ab+c^2}{a+b} + \frac{bc+a^2}{b+c} + \frac{ca+b^2}{c+a} \geq a+b+c.$$

Fuente: Propuesto por Hojoo Lee, Korea-Aparecido en revista Crux-Problema 2581

Solución

Sea *D=(a+b)(b+c)(c+a)*. Claramente *D>0*. Demostraremos que la diferencia entre el lado izquierdo y el lado derecho de la inecuación no es negativo.

$$\frac{ab+c^2}{a+b} - c + \frac{bc+a^2}{b+c} - a + \frac{ca+b^2}{c+a} - b$$

$$= \frac{c^2+ab-ac-bc}{a+b} + \frac{a^2+bc-ab-ac}{b+c} + \frac{b^2+ac-ab-bc}{c+a}$$

$$= \frac{(c-a)(c-b)}{a+b} + \frac{(a-b)(a-c)}{b+c} + \frac{(b-a)(b-c)}{c+a}$$

$$= \frac{(c^2-a^2)(c^2-b^2)+(a^2-b^2)(a^2-c^2)+(b^2-a^2)(b^2-c^2)}{D}$$

$$= \frac{a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}{D}$$

$$= \frac{\left[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\right]}{D} \geq 0$$

La igualdad es correcta si y solo si *a=b=c*.

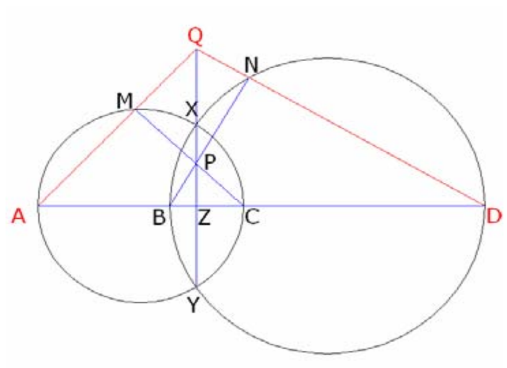
Solución: Sefket Arslanagic, Sarajevo – Traducción por Aldo Gil

Problema 4

Sean *A,B,C,D* puntos distintos en una recta. Los círculos con diámetros *AC* y *BD* se interceptan en los puntos *X* e *Y*. *XY* corta a *BC* en *Z*. Sea *P* un punto en *XY* diferente a *Z*.

CP intercepta el circulo con diámetro *AC* en *C* y *M*, y *BP* intercepta el circulo con diámetro *BD* en *B* y *N*. Probar que *AM, DN* y *XY* son concurrentes.

Fuente: Lista corta de problemas 36 OIM-Canadá 1995- Problema 1-Geometría



Solución

Sean las líneas *XY* y *DN* que se cortan en *Q*. Entonces los triangulo *BPZ* y *QDZ* son semejantes. De aquí: $\frac{ZQ}{ZD}=\frac{ZB}{ZP}$, ó $ZQ=\frac{ZD.ZB}{ZP}$, por lo que *Z,D,B* y *P* son puntos fijos. Por simetría, *AM* también pasa por *Q*.

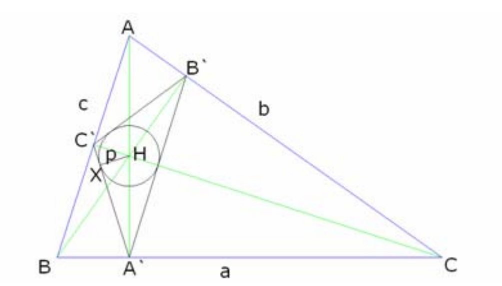
Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil.

Problema 5

Este problema propuesto por Canadá al jurado para la Olimpiada Internacional de 1993, y no fue aprobado (o sorteado, o que se yo), pero es espectacular, sobre todo por el manejo de la geometría, y la combinación con la trigonometría, y con Cauchy de remate, hace una solución realmente respetable y respetuosa de la rigurosidad académica, si van limitando el problema salen tres o cuatro (hagan la prueba). Eso si, tengan mucha paciencia al seguir los pasos, imaginen lo que me paso a mi al traducir. Hummm!!!, pero vale la pena el sacrificio.

Sea el triángulo *ABC*, con circunradio *R=1*. Sea *r* el inradio de *ABC* y sea *p* el inradio del triángulo órtico *A'B'C'* del triángulo *ABC*. Probar que $p \le 1-\frac{1}{3}(1+r)^2$

Fuente: Propuesto por Canadá para la IMO 1993- Problema 2



Solución:

(i) Primero debemos notar que en un triángulo ABC, se cumple la relación:

$cosA+cosB+cosC= 1+\frac{r}{R}$ = $1 + r$ (en este caso porque, *R*= 1)

[Esta fórmula es bien conocida, y puede derivarse fácilmente. Por

ejemplo, expresa cada uno de los cosenos en términos de *a, b, c* usando la ley de cosenos y usando estas expresiones extendidas en el lado izquierdo. Entonces relaciona las fórmulas *sr* y $\frac{abc}{4R}$ para el área del triángulo *ABC* según la fórmula de Herón, y esto nos da *r* y R en términos de a, *b,* c , luego simplificando $1+\frac{r}{R}$ establecemos la identidad].

(ii) Luego, demostrar que

p = 2 cosA cos B cosC. Recuerda que el ortocentro del triángulo *ABC* es también el incentro del triángulo órtico *A'B'C'.* Sea *X* el pie de la perpendicular de *H* a A'C', así *HX = p*. En el triángulo *A'BH*:

$tan\angle A'BH = \frac{HA'}{BA'}$ y entonces: *HA' = c cos B tan(90 - c) = c cos B cot C.*

También: $\angle XA'H = \angle HA'B' = \angle B'CH$ (en consecuencia CA´HB´es un cuadrilátero cíclico) y por esto sen $\angle XA'H$=sen $(90º\text{-}A) = \frac{HX}{HA'}=\frac{p}{HA'}$. Así

p=HA´sen(90º-A) =C cosB.cotC.cosA = $(\frac{c}{senC})$*cosA.cosB.cosC =*

2cosA.cosB.cosC.

(iii) luego, notar que: *2cosA.cosB.cosC +* $cos^2A+cos^2B+cos^2C=1$.

En consecuencia: *4cosA.coB.cosC =*

2[2cosA.cosB] cosC =

2[cos(A+B)+cos(A-B)] cosC. =

[2cos(A+B).cosC]+[2cos(A-B).cosC] =

cos(A+B+C) + cos(A+B-C)+cos(A-B+C) +cos(A-B-C) = -1-cos(180-2C)-cos(180-2B)-cos(180-2A) = -1-cos 2A-cos 2B-cos 2C = $2-2cos^2A-2cos^2B-2cos^2C$.

(iv) Finalmente usando la inecuación de Cauchy, deducimos que:

$\frac{1}{3}(cosA+cosB+cosC)^2 \le cos^2A+cos^2B+cos^2C$

Esto implica: $p+\frac{1}{3}(1+r)^2 =$

$2cosA.cosB.cosC+ \frac{1}{3}(cosA+cosB+cosC)^2$

$\le$ $2cosA.cosB.cosC + cos^2A + cos^2B + cos^2C = 1$. y de aquí: $p \le 1-\frac{1}{3}(1+r)^2$.

Comentario de los que resolvieron el problema: Es poco elegante imponer R=1. Si recortamos esta condición irrelevante, tenemos una versión "dimensionalmente correcta" y que es: $\frac{p}{R} \le 1 - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2$

Nota del editor (o sea yo): Prometo buscar la demostración de la desigualdad de Cauchy, y por supuesto compartirla (si alguno la tiene lista me la envía). Esta es una link, donde los puedes bajar:
Muy buena y elemental
http://math.unl.edu.ar/~aguilera/geometria2005/pdfs/desigualdades.pdf

Problema 6

Probar que: $\frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{6} \ge (n!)^{\frac{2}{n}}$, ($n$ es un entero$\ge$1), y la igualdad solo es posible si n es igual a 1.

Fuente: Propuesto en la Olimpiada Matemática Internacional IX Problema 8– 1967

Solución

$$(n!)^{\frac{2}{n}} = ((1.2.3....n)^{\frac{1}{n}})^2 \le \left(\frac{1+2+3.....+n}{n}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{6} - \frac{n^2-1}{12} \le \frac{1}{3}n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{6}$$

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Problema 7

Sean *A,B,C* tres puntos no colineales. Probar que existe un único punto *X* en el plano *ABC* tal que $XA^2+XB^2+AB^2=XB^2+XC^2+BC^2=XC^2+XA^2+CA^2$

Fuente: Lista corta de problemas 36 OIM-Canadá 1995- Problema 2-Geometría

Solución

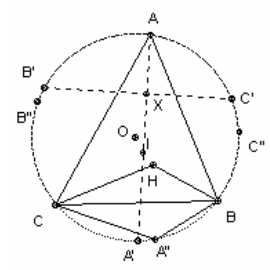
Sea el triángulo *A´B´C´* tales que *A,B* y *C* son los puntos medios respectivos de *B´C´,C´A´* y *A´B´*. De la condición en el triángulo *XAB* y *XAC*, tenemos BX^2-CX^2=AC^2-AB^2. Desde que *B,C* y AC^2-AB^2 son fijos, la ubicación del punto *X* es una línea perpendicular a *BC*. Más aun, si pasa por *A´* por lo tanto $A´B^2$- $A´C^2$=AC^2-AB^2. En forma similar, *X* esta en la línea que pasa por *B´* perpendicular a *CA*, y también en la línea que pasa por C´ perpendicular a AB. De aquí se deduce que existe una única posición para el punto *X*, llamada ortocentro del triángulo A´B´C´.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil.

Problema 8

Las bisectrices del triángulo *ABC* corta el circuncírculo en *A', B', C'*. Demostrar que el área *A'B'C'* ≥ área *ABC*.

Fuente: Propuesto en Long Short List IMO-1988-Problema 3



Solución:

Sea *H* el ortocentro. Sea *AH* que corta el circuncírculo en *A"*. Definamos *B"* y *C"* en forma similar. ∠*A"CB* = ∠*A"AB* = *90º* - ∠*B* = ∠*BCH*, y *A"H* es perpendicular a *BC*. De aquí *A"* es la reflexión de *H* en *BC* y por lo tanto los triángulos *A"CB* y *HCB* son semejantes. En forma similar para *C"BA* y *B"AC.* Luego el hexágono *AB"CA"BC"* tiene el doble de área que *ABC*.

Sea *B'C'* que corta a *AA'* en *X*. Entonces ∠*B'XA* = ∠*B'C'A* + ∠*XAC'* = ∠*B'C'A* + ∠*XAB* + ∠*C'AB* = ∠*B'BA* + ∠*A'AB* + ∠*C'CB* = ∠*B/2* + ∠*A/2* + ∠*C/2* = *90º*. De aquí *A'A* es una altura del triángulo *A'B'C'*. De aquí el hexágono *AB'CA'BC'* tiene el doble del área que el triángulo *A'B'C'.*

Pero *A'* es el punto medio del arco *BC,* por lo que área *A'BC* ≥área *A"BC*. En forma similar para los otros dos pares de triángulos, así el área *AB'CA'BC'* ≥ área *AB"CA"BC"*. De aquí el área *A'B'C'* ≥ área *ABC*.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil.

Problema 9

Los ángulos de un triángulo con lados *a, b, c* son α, β, γ. Demuestre que si 3α +2β =180º, $\alpha+\beta+\gamma$,=0.

Fuente: International Hungarian Mathematics Competition, 2001-Problema B. 3475.

Solución.

Con la regla del coseno, $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$. Por consiguiente, la condición es equivalente a la igualdad: $b^2=2bc\cos\alpha-bc$, dividiendo por *bc* y aplicando la ley de senos, también es equivalente a la igualdad: $\frac{sen\beta}{sen\gamma} = 2\cos\alpha - 1$.

De la condición: $3\alpha+2\beta=180^{\circ}=\alpha+\beta+\gamma$, podemos ver que $\alpha=2\gamma$-180°, y β=360°-3γ. De aquí sinβ=-sin 3γ, y cos α=-cos 2γ, así nosotros necesitamos demostrar la relación: $\frac{-sen3\gamma}{sen\gamma}=-2\cos 2\gamma-1$, de donde sigue la igualdad:

sin 3x=sin 2x.cos x+sin xcos 2x=2sin xcos^{2}x+sin xcos 2x=sin x(2cos 2x+1)

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Problema 10

Los vértices A,B y C de un triángulo son conectados por los puntos X,Y,Z , en cada uno de los lados opuestos respectivamente (no en los vértices). ¿Pueden los puntos medios de los segmentos AX, BY y CZ estar alineados?

Fuente: Tournament of Towns 1993

Solución

Sean *D,E* y *F* los puntos medios de los lados *BC, AC* y *AB* respectivamente. Dado un punto *P* en *BC*, sea *AX* con la intersección de *EF* un punto llamado *M*. Entonces es fácil ver que *M* esta en el punto medio de *AX.* De aquí, los puntos medios los segmentos *AX,BY,BZ* están respectivamente en *EF,DF* y *d21D15 Tc(D,E)Tj/TT2 1 Tf-7.5751 7.6061 0 2.572362 559.3475 Tm-0.00321 Tc,000amepces).sil coZ estles.lineados*