Problema 1

Antes de empezar, les comento que el problema es magnifico, e inclusive sirve como idea para crear enigmas (puzzles) de diferentes tipos, la verdad su solución me impacta y necesita mucha atención. Me encanto el problema de marras, y miren que lo ví en la combi cuando andaba leyendo problemas para traducir, y normalmente estos muy largos los paso, pero no se porque me quede pegado a la traducción. Ojala les guste…………………..

Al término de nuestro campeonato de fútbol inter-especies, en la cual cada equipo jugo un partido contra cada uno de los otros, las tablas preparadas por los Zecropianos y los Valudianos es la siguiente:

	Ganados	Empatados	Perdidos	Gol contra	Gol favor	Puntos
Zecropia	*c*	*b*	*b*	*cc*	*ffh*	*d*
Est. Terrestre	*b*	*b*	*c*	*fbe*	*ff*	*b*
Valudia	*f*	*b*	*f*	*ah*	*db*	*c*

	Ganados	Empatados	Perdidos	Gol contra	Gol favor	Puntos
Valudia	*p*	*x*	*p*	*pxq*	*ppr*	*r*
Zecropia	*r*	*x*	*x*	*mm*	*mxr*	*q*
Est. Terrestre	*x*	*x*	*r*	*rqp*	*pq*	*x*

Cada tabla es equivalente a la otra y ambas dan los valores correctos. Sin embargo cada una de las tablas esta realizada en el sistema de numeración de los que prepararon la misma, siendo cada una (las bases de numeración) menor que diez y mayor que uno. Los Zecropianos y los Valudianos usan las mismas operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, así como las reglas de manipulación, que los de la estación terrestre. Hemos sustituido letras para los símbolos y cada una de ellas representa un dígito distinto, y obviamente es el mismo cada vez que aparece. Dos puntos son asignados al ganador de un partido, y un punto al que empata, obviamente ninguno al que pierde. Dar la respuesta a este enigma, preparando la tabla en base diez (o sea preparar la tabla tal como lo harían los de la estación terrestre.

Fuente: Propuesto por John Magill, England aparecido en Mathematicorum Problema 2098.

Solución:

Mirando la tabla preparada por los Zecropianos, vemos que la estación terrestre gano *b* juegos y empato *b* juegos y por lo tanto debe tener *3.b* puntos. Como tienen *b* puntos, la única posibilidad es que *b=0*. Como cada equipo ha jugado dos partidos, los zecropianos deben haber ganado los dos (ya que *b=0*). Por lo tanto *c=2*, y también por extensión *d=4*; y de los resultados de Valudia, *f=1.* En la tabla de

los Valudianos, obtenemos los siguientes valores: *x=0, p=1, r=2 y q=4*.

Sea *s* la base de numeración usada por los Zecropianos y *t* la base usada por los Valudianos. Comparando las columnas de los goles de ambas tablas, encontramos que el número de goles de la estación terrestre es $(11)_s$ y $(14)_t$, así $s+1=t+4$. Comparando los goles de Valudia, vemos que $(40)_s = (112)_t$, así $t^2+t+2=4s = 4(t+3)$. En consecuencia *t=5* y *s=8*.

Zcropia tiene $(22)_8=18$ goles en contra. , en consecuencia $(mm)_5=18$, y esto nos da *m=3*. El número de goles a favor de Zecropia es $(302)_5 = 77$, en consecuencia $(11h)_8=77$, y *h* debe ser 5. El número de goles en contra de Valudia debe ser $(104)_5=29$, en consecuencia $(a5)_8= 29$, y de aquí *a=3*.

Finalmente la tabla preparada por la estación terrestre queda como sigue.

	Ganados	Empatados	Perdidos	Gol contra	Gol favor	Puntos
Est. Terrestre	*0*	*0*	*2*	*71*	*9*	*0*
Valudia	*1*	*0*	*1*	*29*	*32*	*2*
Zecropia	*2*	*0*	*0*	*18*	*77*	*4*

Nota del traductor: Realmente estos equipos intergalácticos, son bastante malos, para empujarse la cantidad bárbara de goles en contra; como se nota que son defensas muy malas, o de repente partidos de tres días seguidos, o algo así…… en fin a quien se le ocurrió el problema, debe saber tanto de fútbol como yo de religión, o Bush de derecho humanos.

Solución: Kathleen Lewis, NY, USA con traducción y acido comentario de Aldo Gil C.

Problema 2

Un problema, que viene mucho en física (cinemática), propuesto por el gran Ignacio, y resuelto por otro buen muchacho como Pablo, me hizo sentir atraído a birlarme este problema de Snack, monono el problema y monona la solución….

Un coche tarda en realizar el trayecto *A-B* dos horas más de lo que tarda un camión en realizar el trayecto contrario, *B-A*. Saliendo simultáneamente, tardan 2h 55m en cruzarse. ¿Cuánto tarda cada uno en completar su recorrido?

(Pásese por alto el sorprendente hecho de que el coche tarde más que el camión)

Fuente: Propuesto por Ignacio Larrosa Cañestro (Mayo 2007)

Solución

Hola Snark, Ignacio

a = tiempo que tarda el camión en total medido en minutos

$a+120$= tiempo del coche en total en minutos

x= velocidad del camión

y= velocidad del coche

1) $x.a=y(a+120)$

$x = \frac{y(a+120)}{a}$

2) $(x+y).175=x.a=y(a+120)$

reemplazamos x por su igual expresado en y

$$y.\left(\frac{a+120}{a}+1\right).175 = y(120+a)$$

Eliminamos las y, trabajamos un poco, y obtenemos los valores para a:

a= -70 o 300

obviamente a = 300 minutos, o sea 5 horas, y a+2= 7 horas.

Comprobamos y vemos que el camión en 175 minutos recorre $\frac{175}{300}$ del recorrido y el auto $\frac{175}{420}$; Verificamos:

$$\frac{175}{300}+\frac{175}{420}=1$$

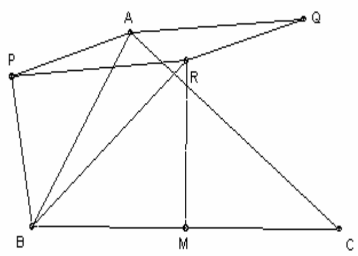
Solución: Resuelto por Pablo Sussi-Lista Snark

Problema 3

ABC es un triángulo con *AB* distinto que *AC. P* es tomado en el lado opuesto de *AB* a *C* tal que *PA* = *PB*. *Q* es tomado en el lado opuesto de *AC* a *B* tal que QA = QC y $\angle Q$ = $\angle P$. R es tomado en el mismo lado de BC a A tal que RB = RC y $\angle$R = $\angle$P. Demostrar que *APRQ* es un paralelogramo.

Fuente: 24th IMO 1983 shortlisted problems-Problema 4

Solución



Sea $\angle RBC = x$. Entonces $RB = \frac{a}{2\cos x}$.

Debido a que: $\angle P$ = $\angle R$, tenemos $\angle PBA$ = $\angle RBC = x$, y por lo tanto $\angle PBR$ = $\angle B$. También $PB=\frac{c}{2\cos x}$.En forma similar, $AQ=\frac{b}{2\cos x}$.

Aplicando la regla de cosenos en el triángulo *PBR*, tenemos $PR^2 = PB^2 + BR^2 - 2\, PB{\cdot}BR \cos B$. De aquí $(2\cos x)^2PR^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B = (2\cos x)^2b^2$. Luego $PR = \frac{b}{2\cos x}$ = AQ. En forma similar, *QR* = *AP*. De aquí sale el resultado.

Solución: Resuelto por Vivek Kumar Mehra

Problema 4

¿En que casos el sistema de ecuaciones :

$x+y+mz=a$

$x+my+z=b$

$mx+y+z=c$; tiene una solución?. Encontrar las condiciones bajo las cuales la única solución del sistema este en progresión aritmética.

Fuente: IMO Shortlist 1967, Mongolia, Problem 4

Solución

Consideremos los casos $m=-2$ y $m=1$. Si $m=1$ entonces obviamente necesitamos que $a=b=c$, y en este caso hay infinitas soluciones. Si $m=-2$, entonces necesitamos que $a+b+c=0$ (reemplazando en las ecuaciones), y en este caso también hay infinitas soluciones (desde que tenemos dos ecuaciones con tres variables), y si (x,y,z) es una solución, entonces lo es $(x+k,y+k,z+k)$. Ahora asumimos que $m \neq -2$, $m \neq 1$.

Sea el conjunto: $S=a+b+c$. Añadiendo las ecuaciones dadas: $x+y+z=\frac{S}{m+2}$.

De aquí:

$a = x + y + mz$

$= \frac{S}{m+2} + (m-1).z \Leftrightarrow z = \frac{1}{m-1}.\left(a-\frac{S}{m+2}\right)$

En forma similar:

$y = \frac{1}{m-1}.\left(b-\frac{S}{m+2}\right), \quad x = \frac{1}{m-1}.\left(c-\frac{S}{m+2}\right).$

Ahora, es obvio que x,y,z están en progresión aritmética si y solo si a,b,c están en progresión aritmética.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Problema 5

Suponer las medianas de un triángulo como m_a, m_b y m_c, ortogonales. Probar que:

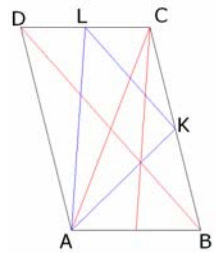
a) usando las medianas de este triángulo es posible construir un triángulo rectángulo.

b) la siguiente inecuación: $5(a^2+b^2-c^2)\geq 8ab$, es válida, donde a,b,c son los lados del triángulo dado.

Fuente: Propuesto en la Olimpiada Matemática Internacional IX Problema 10– 1967

Solución

a) Sea *ABCD* un paralelogramo, y sean *K* y *L* puntos medios de los segmentos *BC* y *CD*. Es fácil demostrar que los lados del triángulo *AKL* son iguales y paralelos a las medianas del triángulo *ABC*. Ver figura.



b) De $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$

$m_b^2 = \frac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2)$

$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$, tenemos:

$\frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) + \frac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2) + \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$, por ejemplo

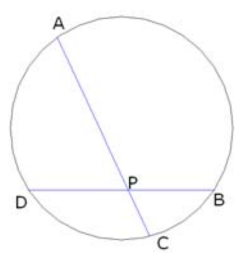
$a^2+b^2=5c^2$.Usando las reglas de desigualdad entre media aritmética y media geométrica, tenemos: $5(a^2+b^2-c^2)=4(a^2+b^2)\geq 8ab$.

Problema 6

A, B, C, y *D* son puntos en un círculo, y los segmentos *AC* y *BD* se interceptan en *P*, tal que $AP = 8$, PC = 1, y BD = 6. Hallar *BP*, si $BP < DP$.

Fuente: 10th Annual Harvard-MIT Mathematics Tournament, February 2007, Individual Round: Geometry Test-Problema 2

Solución



Sea $BP = x$ y $PD = 6 - x$, tenemos que $BP < 3$. La potencia de un punto *P* nos da: $AP \cdot PC = BP \cdot PD$ ó $8 = x(6 - x)$. Esto queda resuelto para $x = 2$ y $x = 4$, y descartamos el ultimo.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil

Problema 7

Un cubo de longitud $s > 0$ tiene la propiedad que su área total es igual a la suma de su volumen y 5 veces la longitud de su lado. Hallar los posibles valores de *s*.

Fuente: 10th Annual Harvard-MIT Mathematics Tournament, February 2007, Individual Round: Geometry Test-Problema 1

Solución

El volumen del cubo es s^3 y su área total es $6s^2$, entonces tenemos, $6s^2 = s^3 + 5s$, ó $0 = s^3 - 6s^2 + 5s = s(s - 1)(s - 5)$.

Luego los valores posibles de s son 1 y 5.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil

Problema 8

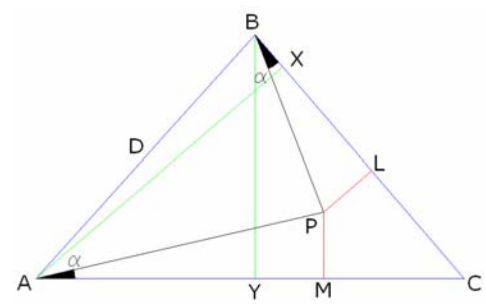
ABC es un triángulo y *P* un punto interior a el. $\angle PAC = \angle PBC$. Las perpendiculares de *P* a BC, y *CA* cortan los lados en *L,* y *M* respectivamente, y *D* es punto medio de *AB*. Probar que *DL=DM*.

Fuente: Problemas suministrados por Hungría IMO-1982 GB1.

Solución

AX y *BY* son alturas. Desde que *D* es el centro del círculo que pasa por *AYXB*, con radio

$r= \frac{1}{2}AB$,



$LD^2-r^2=LX.LB$

$MD^2-r^2=MY.MA$, debemos demostrar que: $LX.LB = MY.MA$

Ahora: $\angle YBX = \angle YAX$. Eliminando los ángulos iguales, nos queda: $\angle YBP = \angle PAX=\alpha$, y $\frac{MY}{BP} = \frac{LX}{AP} = sen\ \alpha$. Así:

$\frac{MY}{LX} = \frac{BP}{AP} = \frac{BL}{AM}$, desde que $\Delta BPL \approx \Delta APM$, y $LX.LB = MY.MA$.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Problema 9

Encuentra todos los valores de *x* tales que: $1! + 2! + 3! + 4! + ... +x!$ sea un cuadrado perfecto.

Fuente: Carlos Enrique Cabrera Guevara - Lista Matracas 16 de diciembre de 2006.

Solución

Llamemos $S_{(x)} = 1!+2!+ 3!+ 4!+... . +x!$

El único valor que lo verifica es 3. $S_{(3)} =1 + 2 + 6 = 9$

Realmente, comprobar que no hay más es muy sencillo.

Comprobamos que S(1) y S(2) no lo verifican.

Y puesto que 5!, 6!, ... son todos múltiplos de 5, tenemos que para x ≥ 4, *S(x)* es congruente con *S*(4) módulo 5.

Como *S(4)* = 1 + 2 + 6 + 24 = 33, 33 *mod* 5 = 3

Así que tenemos que para *x* ≥ 4, $S_{(x)}$ *mod* 5 = 3

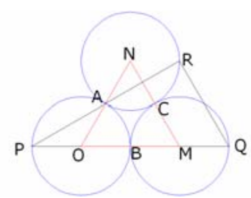
Pero es trivial verificar que ningún cuadrado módulo 5 es igual a 3, así que ya está.

Si se quiere se puede hacer lo mismo con 10 en lugar de 5. Se ve más natural el hecho de que para x ≥ 4, *S(x)* acaba en 3. Y nunca un cuadrado perfecto acaba en 3.

Solución: Ignacio Larrosa- La Coruña- y bueno yo lo transcribo nomás

---

<u>*Problema 10*</u>



Los círculos w_1, w_2, y w_3 tienen centros en *M,N*, y *O*, respectivamente. Los puntos de tangencia entre w_2 y w_3, w_3 y w_1, y w_1 y w_2 son tangentes en *A, B,* y *C*, respectivamente. La línea *MO* intercepta w_3 y w_1 en *P* y *Q* respectivamente, y *AP* intercepta w_2 en *R*. Como *ABC* es un triángulo equilátero y a su vez de lado 1, hallar el área de *PQR*.

Fuente: 10th Annual Harvard-MIT Tournament,2007, Ind.Round: Geometry Test-Problema 3

<u>Solución</u>

Podemos notar que *ONM* es un triángulo equilátero de lado 2, así $2\angle BPA = \angle BOA$ =60°. Ahora $\angle BPA$ es un triángulo 30°-60°-90° con el lado menor de longitud 1, así so $AP = \sqrt{3}$. Ahora, A y B son puntos medios de *PR* y *PQ*, así:

$$[PQR] = \frac{PR}{PA}\cdot\frac{PQ}{PB}.[PBA] = 2.2.[PBA] = 2\sqrt{3}$$

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil

Saludos, Aldo Gil Crisóstomo