En este número 44 de pronto voy a tratar de retornar a las raíces iniciales, lo que pasa es que estuve revisando los números anteriores y me he dado cuenta que me estoy aburguesando con problemas bastante seriotes, y pues encontré una sección peruana que después abandoné, y asi… , realmente mi carácter medio anarco, no me deja ser formalito y encorbatado. En el fondo sigo siendo un hippie rebelde, rockero, y un tipo sin gracia, como era en mi juventud, ni de viejo dejo de serlo, hay un refrán en mi país que dice "el que nace barrigón aunque lo fajen de chico" y joder ahora de viejo hasta la barriga me sobra, pero en fin basta de lamentos y de nuevo la sección peruana

Problema 1

Transformar la expresión: $\sqrt{x^2+x+1-\sqrt{2x^3+x^2+2x}}$, con x>0, en otra que contenga solo dos radicales simples.

Fuente: Examen De Aritmética y Algebra – Univ. Nac. Ingeniería 1971-Problema 1

Solución

Sabemos que:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

Para el caso dado:

$A=x^2+x+1$ y $B=2x^3+x^2+2x$ por lo tanto:

$$C=\sqrt{\left(x^2+x+1\right)^2-\left(2x^3+x^2+2x\right)}=x^2+1.$$

Luego la expresión dada se transforma en:

$$\sqrt{\frac{2x^2+x+2}{2}}-\sqrt{\frac{x}{2}}.$$

Solución: Los proponentes y recopilación de Aldo Gil.

Problema 2

Entre tres cazadores *A*,*B*,y *C* reúnen mas de ocho perros. *B* piensa adquirir cuatro perros más, con lo cual tendrá mas perros que entre *A* y *C*. Se sabe que *B* tiene más perros que *C*, y los que tiene no llegan a cinco perros. ¿Cuántos perros tiene cada cazador?

Fuente: Examen De Aritmética y Algebra – Univ. Nac. Ingeniería 1971-Problema 4

Solución

Sean *a*,*b*,*c* los números de perros que tiene *A*,*B* y *C* respectivamente.

Del enunciado:

$a+b+c>8$……….(*I*)

$b+4>a+c$……..(*II*)

$b<c$ …………..…(*III*)

$c<5$ ………………(*IV*)

Sumando (*I*) + (*II*), resulta $2b+4>8\Rightarrow 2b>4\Rightarrow b>2$… (*V*)

De (*III*) y (*IV*): $b<c<5$………..(*VI*)

De (*V*) y (*VI*): $2<b>c<5$….(*VII*)

De (*VII*) se obtiene que $b=3$ y $c=4$

En (*I*) y (*II*):

$a+3+4>8\Rightarrow a>1$

$3+4>a+4\Rightarrow 3>a$

De donde $a=2$

Los cazadores *A*, *B* y *C* tendrán 2, 3 y 4 perros respectivamente.

Solución: Los proponentes y recopilación de Aldo Gil.

Problema 3

Tengo estas ecuaciones trigonométricas para resolver.

Necesitaría un poco de ayuda.

a) $\operatorname{sen} x+\sqrt{3}\cos x=-1$

b) $\sqrt{2}.(1+\operatorname{tg} x)=\sec x$

Nuevamente gracias

Fuente: Nora Berdini (Lista de discusión Matracas)

Solución

Va rápido:

a) Divide toda la ecuación por 2 y recuerda que $\frac{1}{2}=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$, y así

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right).\operatorname{sen}x+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right).\cos x=-\frac{1}{2}$; $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=-\frac{1}{2}$, y de acá síguele……….

b) Multiplica todo por *cosx* y obtienes:

$\cos x+\operatorname{sen}x=\frac{1}{\sqrt{2}}$; de aquí elevas al cuadrado:

$1+2\sin x\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \operatorname{sen}2x=-\frac{1}{2}$, y termínala…………

Solución: Por Tonio

Problema 4

Suponiendo que $\tan\alpha=p/q$, donde *p*, y *q* son enteros y $q\neq 0$. Probar que el número $\tan\beta$ para el cual $\tan 2\beta=\tan 3\alpha$ es racional solo cuando p^2+q^2 es el cuadrado de un entero.

Fuente: Propuesto en la Olimpiada Matemática Internacional IX Problema 20- 1967

Solución

Desde que: $\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} = \frac{3pq^2-p^3}{q^3-3p^2q}$, $\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$, tenemos que $\tan\ \beta$ es una raíz de la ecuación: $t^2 + 2\frac{q^3-3p^2q}{3pq^2-p^3}t - 1 = 0$, desarrollando: $(3pq^2-p^3)t^2+2(q^3-3p^2q)t-(3pq^2-p^3)=0$. Esta ecuación tiene raíces racionales si y solo si: $(q^3-3p^2q)^2+(3pq^2-p^3)^2=(p^2+q^2)^3$ es el cuadrado de un entero, y esto es satisfactorio si y solo si p^2+q^2 es el cuadrado de un entero

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Problema 5

Resolver las ecuaciones simultaneas: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$; $\frac{1}{x+15}+\frac{1}{y-6}=\frac{1}{z}$; $\frac{1}{x+24}+\frac{1}{y-15}=\frac{1}{z}$.

Fuente: International Hungarian Mathematics Competition, Solutions for exercises "C" in January, 2002 C.658

Solución:

Desde que el lado derecho de cada ecuación es $\frac{1}{z}$, los lados de la izquierda de las ecuaciones son iguales. Con una pequeña reestructuración esto significa que: $\frac{xy}{x+y} = \frac{(x+24)(y-15)}{x+y+9} = \frac{(x+15)(y-6)}{x+y+9}$. Multiplicando en ambos lados de la primera ecuación y realizando algunos cálculos se obtiene $y=x+30$. Substituyendo en la segunda ecuación y una similar reestructuración obtenemos la cuadrática $x^2+80x+1200=0$. De aquí: $x_1=-20$, $x_2=-60$, y $y_1=10$, $y_2=-30$. Finalmente, en la primera ecuación que $z_1=20$, $z_2=-20$.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Problema 6

Determine el promedio de los dígitos de todos los capicúas de 5 cifras

Fuente: International Hungarian Mathematics Competition, Solutions for problems "B", 2000-Proposed C.552

Solución.

Un número capicúa de 5 dígitos esta determinado por los primeros tres dígitos. El primer digito puede ser 1,2,...,9, los otros pueden ser 0,1,...,9. El número de capicúas es $9\cdot10\cdot10=900$.

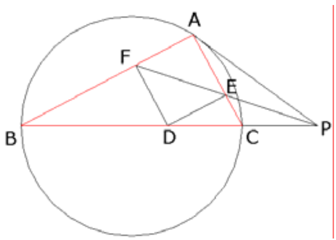
Cada uno de los dígitos 1,2, ...9 se repite 100 veces en la 1° y la 5° posición, y cada uno de los dígitos 0,1,... ,9 se repite 90 veces en la 2°, 3° y 4° posición. Así la suma de todos los capicúas es (1+ ...+9).(10000+1) .100+(1+ ...+9). (1000+10) .90+(1+ ...+9) .100.90. El promedio de los capicúas es 45.(1000100+90900+ 9000)/900 =55000.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Problema 7

Dado el triángulo *ABC* con $\angle A$ = 90° y $AB \neq AC$. Los puntos *D, E, F* están sobre los lados *BC, CA, AB*, respectivamente, de tal modo que AFDE es un cuadrado. Probar que las líneas *BC, FE* y la tangente en el punto *A* del circuncírculo de *ABC* se interceptan en un solo punto.

Fuente: Baltic Way - Oslo, November 4, 2000 Problema 3



Solución:

Sean *BC* y *FE* que se cortan en *P* (ver figura) Basta con demostrar que *AP* es tangente al circuncírculo del triángulo ABC.

Consecuentemente *FE* es el eje de simetría del cuadrado *AFDE*, y tenemos $\angle APE$ = $\angle BPF$. Mas aun, $\angle AEP$ =135°=$\angle BFP$. De aquí los triángulos *APE* y *BPF* son semejantes, y $\angle CAP$ = $\angle ABC$, de aquí deducimos que *AP* es tangente al circuncírculo de *ABC*.

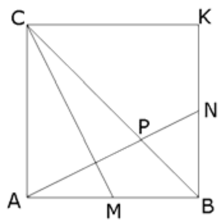
Solución: Los proponentes con traducción, interpretación, diagramación, de Aldo Gil

---

Problema 8

Dado un triángulo *ABC* con $\angle A$ = 90°. Sea *M* punto medio de *AB*. La línea que pasa por *A* y es perpendicular *CM* intercepta el lado *BC* en *P*. Probar que $\angle AMC = \angle BMP$.

Fuente: Baltic Way - Oslo, November 4, 2000 Problema 2



Solución:

Ubicamos el punto *K* tal que *ABKC* es un cuadrado. Sea *N* el punto de intersección de *AP* y *BK*. En consecuencia *AN* y *CM* son perpendiculares, *N* es punto medio de *BK*. Mas aun los triángulos *AMC* y *BNA* son congruentes, con lo cual obtenemos $\angle AMC = \angle BNA$...... (1).

Luego *BM* = *BN* y $\angle MBP = \angle NBP$, y de aquí se deduce que los triángulos MBP y NBP son congruentes. Esto implica que: $\angle BMP = \angle BNP$............(2)

Combinando (1) y (2) se logra la igualdad requerida.

Solución: Los proponentes con traducción, interpretación, diagramación, de Aldo Gil

Problema 9

Es bueno recordar viejas épocas de maestro, (docente diría mejor, lo otro me suena a desfachatez), y poner uno de mi estilo y como me gustaba mucho el razonamiento, salio así nomás, fue puesto en una Academia de preparación para alumnos pre-universitarios, no es la panacea ,pero es bonito y sencillo nomás.............

En una empresa telefónica, se ha observado que la cantidad de personas que adquieren un teléfono celular, se da la siguiente forma:

1° día: *a* personas

2° día: se quintuplica la cantidad anterior más *b* personas

3° día: se quintuplica la cantidad anterior más *c* personas; y así sucesivamente. Si en el ultimo día adquirieron su celular 3121 personas, además *a,b,c,d*.... son menores que 5,. Calcular *a+b+c+d+*......

Fuente: Propuesto por Aldo Gil (de mi peculio), pero hace muchos años.

Solución:

Tenemos que:

1° día: $a \Rightarrow 5^0$ personas

2° día: $5a + b \Rightarrow 5^1 + x$ personas

3° día: $5(5a+b)+c \Rightarrow 5^2 + z$ personas

4° día: $5(5(5a+b)+c)+d \Rightarrow 5^3 + z$ personas

5° día $5(5(5(5a+b)+c+d)+e \Rightarrow 5^4+n$ personas

El 6° día supera las 3121 personas, luego: $5^4a+5^3b+5^2c+5d+e = 3121$

$625a+125b+25c+5d+e = 3121$

Luego a= 4 y queda: $125b+25c+5d+e = 621$. Luego b= 4 y queda: $25c+5d+e = 121$

Luego c= 4 y queda: $5d+e = 21$

De aquí es fácil deducir que *d*=4 y *e*=1.

$a+b+c+d+e= 16$

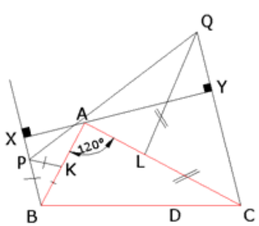
Solución: Pretendo creer que alguien lo resolvió en el aula, (la de aquí es la mia).

Problema 10

Rematamos este número 44 con este problemita que aparece en las pruebas de Baltic Way, tomadas en Oslo. La verdad que me da un aire de conquista napoleónico, cuando logro traducir estos problemas, a veces se ponen un poquito duros, no crean que solamente es traducir con el google, sino que viene toda una sensación de cariño y acercamiento a la inquietud del problema, su afán de lucimiento, sus ganas de demostrarse por si mismos, su lógica y la necesidad de acudir a griegos para ayudarnos, en fin toda una secuela y agrupamiento de personas alrededor del problemilla, alucinen a Pitágoras, Ptolomeo y un niño del siglo XXI aplicando lápiz y papel, apasionante eh...!

Dado un triángulo ABC con $\angle A$ = 120°. Los puntos *K* y L están en los lados AB y AC, respectivamente. Sea *BKP* y *CLQ* triángulos equiláteros construidos externamente al triángulo *ABC*. Probar que: $|PQ| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.\left(|AB|+|AC|\right)$.

Fuente: Baltic Way - Oslo, November 4, 2000 Problema 3



Solución:

$\angle ABC + \angle ACB$ = 60°, las líneas BP y CQ son paralelas. Sean *X* e *Y* los pies de las perpendiculares desde *A* a *BP* y *CQ*, respectivamente. Entonces $|AX| = \frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$ y $|AY| = \frac{\sqrt{3}}{2}|AC|$.

Desde que X, A e Y son colineales, tenemos: $|PQ| \geq |XY| = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(|AB|+|AC|\right)$PQ

Solución: Los proponentes con traducción, interpretación, diagramación, de Aldo Gil

Ya lo dije todo en el preámbulo del problema 10 (y es válido para todos los traducidos) la filosofía del número es una joda.........

Saludos cordiales, Aldo