El inicio de este número trae buenos problemas, realmente la temática es la siguiente:
Se van resolviendo (o traduciendo para no ser tan soberbio), y los voy almacenando, no les voy a negar, en principio traduzco los que me gustan, después los que mas o menos y los que no me gustan pues pufff! ni los miro, se que es medio egoísta, pero esto es para mi un entretenimiento, mas que un trabajo, así que … así me tienen que soportar. Esta es la razón pura, así que queda la Critica a la Razón Pura (de quien es?). A ver si ya nos vamos conociendo un poquito mas, y pues avanti mis compañeros con los problemas,

Problema 1

Encontrar todos los enteros n tales que n^2-$11n+63$, sea un cuadrado perfecto.

Fuente: High School Mathematical Mayhem – Revista Crux-Problema H257

Solución

Sea n^2-$11n+63=k^2$, donde k es un número positivo. Entonces:

$4n^2-44n+252=4k^2$

$\Rightarrow (2n-11)^2+131=(2k)^2$

$\Rightarrow (2k)^2-(2n-11)^2=131$

$\Rightarrow (2k+2n-11)(2k-2n+11)=131.$

Como 131 es primo, y también $2k+2n-11$ y $2k-2n+11$, son ambos enteros, y añadido a esto que $4k\geq 0$, entonces quedan dos posibilidades:

Caso 1: $2k+2n-11=131$, $2k-2n+11=1$.

Resolviendo tenemos que $n=38$.

Caso 1: $2k+2n-11=1$, $2k-2n+11=131$.

Resolviendo tenemos que $n=-17$.

Así el conjunto $n=\{38,-27\}$, cumplen las condiciones solicitadas.

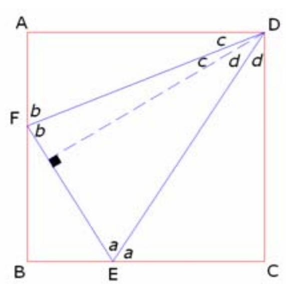
Solución: Adrian Chan, Cambridge, y traducción con adaptación por Aldo Gil.

Problema 2

La longitud del lado de un cuadrado es a. Dos puntos E y F son tomados en BC y AB tales que el perímetro del triángulo BEF es igual a $2a$. Hallar el ángulo $\angle EDF$.

Fuente: Croatian Nacional Matemática Competition 1999-Preparación IMO-Problema 2

Solución



Desde que $BA=BC=a=\frac{1}{2}(BE+EF+FB)$, el excírculo del triángulo BEF opuesto a B toca a BA y BC en A y C respectivamente. Como DA es perpendicular a AB y DC es perpendicular a BC, D es el excentro, de tal forma que DF y DE son las bisectrices de $\angle AFE$ y

$\angle FEC$, respectivamente.

Sea T el pie de la perpendicular de D a EF. Desde que $\angle AFD=\angle TFD$, y $\angle DAF=\angle DTF(=90°)$, tenemos: $\angle ADF=\angle TDF$. En forma similar tenemos: $\angle CDE=\angle TDE$.

En consecuencia: $\angle ADF+\angle CDE=\angle TDF+\angle TDE=\angle EDF$. Entonces: $\angle ADC=2\angle EDF$.

De aquí: $\angle EDF=\frac{1}{2}\angle ADC=45°$.

Solución: Pierre Bornztein, France y traducción de Aldo Gil.

Problema 3

Para que no digan que ando prendido de la geometría, este extraño pero valiente problema,

Probar que todos lo términos de la secuencia:

$\frac{107811}{3},\frac{110778111}{3},\frac{111077781111}{3}$...., son cubos exactos.

Fuente: Propuesto en la Olimpiada Matemática Internacional IX Problema 7– 1967

Solución

Una solución bastante académica y formal pero muy válida, eso si didáctica e ilustrativa.

Denotamos el término n de la secuencia como a_n. Entonces:

$$a_n=\frac{1}{3}\left(\frac{10^{3n+3}-10^{2n+3}}{9}+7.\frac{10^{n+2}-10^{n+1}}{9}+\frac{10^{n+2}-1}{9}\right)$$

$$a_n=\frac{1}{27}\left(10^{3n+3}-3.10^{2n+2}+3.10^{n+1}-1\right)=\left(\frac{10^{n+1}-1}{3}\right)^3$$

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Problema 4

Uno de trigonometría. ¿Alguien conocía esta "conocida fórmula"?. Yo ni en pelea de perros pero es buena. A partir de la fecha juro conocerla!!!!

Sin hacer uso de tablas, calcular el valor exacto del producto:

$$P=\cos\frac{\pi}{15}.\cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{3\pi}{15}.\cos\frac{4\pi}{15}.\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}.\cos\frac{7\pi}{15}.$$

Fuente: Propuesto en la Olimpiada Matemática Internacional IX Problema 25– 1967

Solución.

Usamos la conocida fórmula:

$$\cos x.\cos 2x.\cos 4x......\cos 2^{n-1}x = \frac{sen 2^n x}{2^n sen x}$$

Tenemos: $P = \cos\frac{\pi}{15}.\cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{3\pi}{15}.\cos\frac{4\pi}{15}.\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}.\cos\frac{7\pi}{15}$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{15}.\cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{4\pi}{15}.\cos\frac{7\pi}{15}\right).\left(\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\right)\left(\cos\frac{5\pi}{15}\right)$$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{15}.\cos\frac{2\pi}{15}.\cos\frac{4\pi}{15}.\cos\frac{8\pi}{15}\right).\left(\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{-sen\frac{16\pi}{15}}{16 sen\frac{\pi}{15}}.\frac{sen\frac{4\pi}{5}}{4 sen\frac{\pi}{5}}.\frac{1}{2} = \frac{1}{16}.\frac{1}{4}.\frac{1}{2} = \frac{1}{128}$$

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Problema 5

Esta desigualdad parece clásica pero su solución es bien objetiva

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ac+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Fuente: International Hungarian Mathematics Competition, Solutions for problems "B", 2000- Proposed by: *M. Ábrány,* Beregszász- *Problema B. 3384*

Solución.

Probando las inecuaciones:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2}{3}a-\frac{1}{3}b,$$

$$\frac{b^3}{b^2+bc+c^2} \geq \frac{2}{3}b-\frac{1}{3}c, \text{ y}$$

$\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{2}{3}c-\frac{1}{3}a$. La suma de ellas resuelve el problema.

Por simetría cíclica es suficiente probar la primera inecuación. Esta puede ser trans-formada a $(a+b)(a-b)^2 \geq 0$, la cual siempre se cumple.

Comentario: Se obvian varias operaciones, así que no se resuelve en un par de líneas

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Problema 6

Sea: $S = \frac{1^2}{1.3}+\frac{2^2}{3.5}+\frac{3^2}{5.7}+....+\frac{500^2}{999.1001}$.

Encontrar el valor de S.

Fuente: Olymon-Canadá – Año 2000 – Problema 7

Solución:

$$\frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{i}{2i-1}+\frac{i}{2i+1}\right)$$

Esto es: $S = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{500}\left(\frac{i}{2i-1}+\frac{i}{2i+1}\right)$

$$4S = \sum_{i=1}^{500}\left(\frac{i}{2i-1}+\frac{i}{2i+1}\right) = \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+...+\frac{500}{999}+\frac{500}{1001}$$

En consecuencia: $\frac{i}{2i+1}+\frac{i+1}{2i+1} = 1$

Podemos combinar todos estos términos para obtener:

$$4S = 1+499+\frac{500}{1001} = \frac{501000}{1001} \Rightarrow S = \frac{125250}{1001}$$

Solución: Resuelto por Holmes Miranda

Problema 7

Expresar *cos(t)* como una función racional de $cos^3(t)$ y $sin^3(t)$, por ejemplo, encontrar las polinomiales $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ tales que $\cos(t) = P(\cos^3(t),\sin^3(t)) / Q(\cos^3(t),\sin^3(t))$.

Fuente: I. S. Cohen

Solución

$P(x,y) = x(2 + x^2 + y^2)$, $Q(x,y) = 1 + 2x^2 - y^2$ y

$P(x,y) = (1 + 2x^2 - y^2)^2$, $Q(x,y) = x(2 + x^2 + y^2)^2$.

La primera puede ser desarrollada como sigue:

$(cos^2 t + sin^2 t)^3 = 1$

$cos^6 t + 3cos^2 t.sin^2 t.[cos^2 t + sin^2 t] + sin^6 t = 1$

De aquí: $\cos^2 t.\sin^2 t = \frac{\cos^6 t + \sin^6 t}{3}$. También tenemos:

$cos^2(t) = cos^2(t)[cos^2(t) + sin^2(t)]$

$= cos^4(t) + cos^2(t)sin^2(t)$

$= cos^6(t) + cos^4(t)sin^2(t) + cos^2(t)sin^2(t)$

$= cos^6(t) + cos^2(t)sin^2(t)\ [cos^2(t) + 1]$

Sustituyendo la expresión previamente desarrollada para $cos^2(t)sin^2(t)$ dentro de esta última ecuación y resolviendo para $cos^2(t)$, tenemos:

$cos^2(t) = \dfrac{1+2\cos^6 t - sen^6 t}{2+\cos^6 t + sen^6 t}$. Sustituyendo esta expresión en $cos(t) = \dfrac{\cos^3 t}{\cos^2 t}$, obtenemos el resultado deseado.

Solución: Chris of Canada and Matt Hudelson of Washington State University

---

Problema 8

Después de tantos duros problemas, uno para relajarse, no se nos vaya a incendiar el cerebro.............

Se divide un numero $\overset{\circ}{23}+8$ entre un número $\overset{\circ}{23}+6$), obteniendo como cociente un numero de tres cifras $\overset{\circ}{13}+6$ y un residuo igual a 5. ¿Cuáles son los valores que puede tomar el cociente?

Fuente: Lista de discusión de Clubes Cabri-Octubre 2006

Solución

Si $\dfrac{\overset{\circ}{23}+8}{\overset{\circ}{23}+6} = \overset{\circ}{23}+6$, con 5 de residuo, podemos decir lo siguiente:

$\dfrac{23t+8}{23h+6} = 13k+6$, con t,h,k enteros, es lo mismo que decir

(13k+6).(23h+6)+5=23t+8. Operando:

13.23.k.h+6.23.h+13.6.k+33=23t

Luego se usa la siguiente propiedad, si uno el primer término con el segundo y el tercero con el cuarto me queda una suma de dos términos. A esta suma la divide 23 porque t es entero, y como 23 divide al primer término mas el segundo (porque se puede sacar como factor común), luego 23 divide al tercero mas el cuarto entonces hay que buscar lo siguiente.

13.6.k + 33 ≡ 0 (*mod* 23)

13 es congruente con menos 10 (23) y 33 es congruente con 10 (23) entonces: -10.6.k + 10 ≡ 0 (*mod* 23)

Vemos para que esto pase *6.k* tendría que ser congruente con 1 (*mod* 23) y así la suma quedaría congruente a 0 (*mod* 23). Decir *6.k* es congruente a 1 es lo mismo que decir encontrar el inverso multiplicativo de 6 en (*mod* 23). Hay un algoritmo para hacer esto pero siendo pocos los casos porque el enunciado me restringe el cociente entonces los hago a mano y queda k = 4,19, 42, 65, 88.. Pero como el enunciado dice que el cociente debe tener 3 cifras entonces veo cuales cumplen *13.k + 6* tiene 3 cifras. y estos son :

13.19 + 6= 253

13.42 + 6 = 552

13.65 + 6 = 851

Me dicen que hay otras soluciones para el cociente, como 357,656,955...

Comprobar!!!!!!

Solución: Ay mamita, me olvide apuntar al solucionador, pero de seguro uno bueno, yo lo transcribo nomás.........

Problema 9

Si $\overline{abccba}$ representa la cantidad de divisores de otro número entero positivo cuya raíz cuadrada es exacta, halle el residuo de dividir: $\overline{cba}^{\overline{c4}}$ entre 8

Fuente: La verdad no se, pero que es bueno lo es ....

Solución

Entiendo que el suprarayado significa que las distintas letras y ó dígitos componen un solo número por concatenación. En ese caso es muy sencillo. Si el número en cuestión es un cuadrado perfecto, el número de sus divisores es impar, por lo que a es impar y $\overline{cba}$ también. Pero un impar elevado al cuadrado, y a cualquier exponente par como $\overline{c4}$, es igual a 1 (mod 8), por lo tanto el residuo es 1.

Comentario: Realmente espectacular, y después dicen que la matemática no es linda.......joder!!!!!!

Solución: Ignacio Larrosa- La Coruña- y bueno yo lo transcribo nomás

---

Problema 10

Después no andes diciendo que solo le achunto a la geometría nomás. De vez en cuando me rallo con el algebra. Este es bueno y punto.....

Supongamos que a,b y c son enteros reales positivos. Probar que:

$$\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ac}+\frac{a+b}{c^2+ab} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Fuente: Propuesto por Hojoo Lee, Korea-Aparecido en revista Crux-Problema 2580

Solución

Sea $D=abc(a^2+bc)(b^2+ac)(c^2+ab)$. Claramente D>0. Tenemos:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{b+c}{a^2+bc}-\frac{c+a}{b^2+ac}-\frac{a+b}{c^2+ab}$$

$$=\frac{a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4-a^4b^2c^2-b^4c^2a^2-c^4a^2b^2}{D}$$

$$=\frac{(a^2b^2-b^2c^2)^2+(b^2c^2-c^2a^2)^2+(c^2a^2-c^2b^2)^2}{D}\geq 0$$

Lo cual demuestra que la desigualdad es verdadera. La igualdad es correcta si y solo si $a=b=c$.

N.T. "rallo" significa algo así como que me vuelvo loco, aquí en Perú (digo aquí se dice así, pe-ro lo de loco lo desparramo por el mundo)

Solución: Richard Eden, Philippines, adaptación y traducción por Aldo Gil

Me salio facilito el 43.

Saludos cordiales

Aldo Gil Crisóstomo