Problema 1

¿Cuántos números enteros positivos de dos dígitos tienen la propiedad que cuando son invertidos, el nuevo número es al anterior mas 9?

Fuente: Polya Mathematicakl Competition-1997-Individual Problema 1

Solución

Si los dígitos del número son a y b, entonces su valor es $10a + b$. En forma similar, el nuevo número con los dígitos cambiados tiene valor $10b + a$. El problema nos dice que $10b + a = 10a + b + 9 \Rightarrow 9b = 9a + 9 \Rightarrow b = a+1$. El dígito a no puede ser 0 (obvio) y no puede ser 9, debido a que $b=a+1$ tendría dos dígitos, pero si pueden ser los otros dígitos del 1 al 8

Solución: Los proponentes y traducción por Aldo Gil C.

Hay algunos problemas que son fáciles de solucionar por la "vía legal", pero adquieren envergadura cuando son resueltos mediante algún artificio algebraico, este que viene tiene esa particularidad.

Problema 2

$2x^4-3x^3+ax^2+7x+b$ es divisible por x^2+x-2. Hallar a y b

Fuente: Polya Mathematicakl Competition-1997-Individual Problema 2

Solución

Es posible resolver el problema efectuado la división larga, pero optaremos por otro camino. Podemos razonar factorizando $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$, y por lo tanto -2 y 1 son las raíces de la ecuación: $2x^4-3x^3+ax^2+7x+b$. Sustituyendo cada una de las raíces en la ecuación, tenemos $4a+b=-42$ y $a+b=-6$, y al resolver nos da el valor a=-12 y b=6.

Solución: Los proponentes y traducción por Aldo Gil C.

Problema 3

El producto N de 3 números enteros positivos es 6 veces su suma, y uno de los enteros es la suma de los otros 2. Hallar la suma de todos los posibles valores de N.

Fuente: Practice Questions for the 2004 AIME from the 2003 AIME alternate, 1-9-Problema 1

Solución

Sean los tres números, a,b,c y sin pérdida de generalidad, asumimos que $a \leq b \leq c$. Entonces $a.b.c = 6(a+b+c)$, y $c= a+b$. Esto nos da $a.b.c = 12.c$, y $a.b = 12$, entonces

$(a,b,c) = (1,12,13), (2,6,8)$, ó $(3,4,7)$, y N=156,96 ú 84. La suma de los posibles valores de N es 336.

Solución: Los proponentes y traducción por Aldo Gil C.

Problema 4

Si: $\dfrac{\log_a 2 + \log_b 2}{(\log_a 2).(\log_b 2)} \geq 6$. Hallar el menor valor posible de $a.b$

Fuente: Polya Mathematicakl Competition-1997-Individual Problema 4

Solución

Usando la identidad logarítmica: $\log_x y = \dfrac{\log y}{\log x}$, podemos simplificar el lado izquierdo de la ecuación como sigue: $\dfrac{\log_a 2 + \log_b 2}{(\log_a 2).(\log_b 2)} = \dfrac{\dfrac{\log 2}{\log a} + \dfrac{\log 2}{\log b}}{\left(\dfrac{\log 2}{\log a}\right)\left(\dfrac{\log 2}{\log b}\right)} = \dfrac{\log b + \log a}{\log 2} = \log_2 ab$.

Esta expresión solo puede ser mayor ó igual que 6, cuando ab es mayor ó igual que $2^6=64$.

Solución: Los proponentes y traducción por Aldo Gil C.

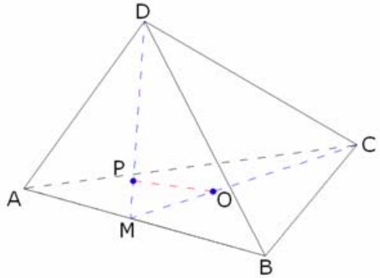
Problema 5

En un tetraedro regular, los centros de las cuatro caras son los vértices de un tetraedro mas pequeño, la relación del volumen del tetraedro pequeño con respecto al grande es m/n, donde m y n son primos relativos entre si, enteros y positivos. Hallar $m+n$.

Fuente: Practice Questions for the 2004 AIME from the 2003 AIME alternate, 1-9-Problema 4

Solución

Sean O y P los centros de las caras DAB y ABC, respectivamente, del tetraedro regular $ABCD$. DO y CP interceptan a AB en su punto medio M. En consecuencia: $\dfrac{MO}{MD} = \dfrac{MP}{MC} = \dfrac{1}{3}$, los triángulos MOP y MDC son semejantes, y $OP=\dfrac{1}{3}DC$.



Debido a que los tetraedros son semejantes, la relación de sus volúmenes es el cubo de la relación de los lados correspondientes, llamamos $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, así $m+n=28$.

Solución: Los proponentes y traducción por Aldo Gil C.

Problema 6

En un triángulo ABC, probar que al menos una de las cantidades:

$(a+b-c)\tan^2\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right)$, $(-a+b+c)\tan^2\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)$,

$(a-b+c)\tan^2\left(\frac{C}{2}\right)\tan\left(\frac{A}{2}\right)$, es mayor ó igual que $\frac{2r}{3}$, donde r es el radio del incírculo del triángulo ABC.

Fuente: Propuesto por Aram Tangboondouangjit, USA-Aparecido en Crux 2000- Problema 2554

Solución:

Probaremos algo mucho más fuerte que esto; la media aritmética M, de las tres cantidades es al menos $\frac{2r}{3}$. Sea

$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ el semiperímetro del triángulo y sean $x=s-a$, $y=s-b$, $z=s-c$. Entonces claramente x,y y z son todos positivos con $x+y+z = s$.

Sabemos que: $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} =$

$\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$, $\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$, etc.

Así: $(-a+b+c)\tan^2\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right)$,

$$= 2(s-a)\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$= \frac{2x^2z}{(x+y+z)y}\sqrt{\frac{xy}{(x+y+z)z}} = \frac{2x^2r}{y(x+y+z)}$$

En forma similar:

$(a-b+c)\tan 2\left(\frac{C}{2}\right).\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2y^2r}{z(x+y+z)}$, y

$(a+b-c)\tan^2\left(\frac{A}{2}\right).\tan\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{2z^2r}{x(x+y+z)}$

De aquí:, $M \geq \frac{2r}{3}$ es equivalente a:

$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x} \geq x+y+z$, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\right)(x+y+z) \geq \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt{z}}\sqrt{z}+\frac{z}{\sqrt{x}}\sqrt{x}\right)^2$$

$= (x+y+z)^2$

Solución: Walter Janous, Austria y traducción con adaptación por Aldo Gil

---

Problema 7

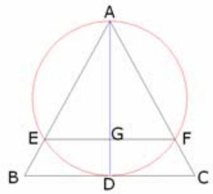
El cuadrilátero convexo $ABCD$, tiene área 1, y AB es prolongado hasta E, CD hasta G, y DA hasta H, de tal modo que: $AB=BE, BC=CF, CD=DG$, y $DA=AH$. Encontrar el área del cuadrilátero $EFGH$.

Fuente: South African Mathematics OlympiadSection B-Problema 1

Solución:

Sea $[P_1P_2P_3P_4]$, el área del polígono. Debido a que B y A son puntos medios de AE y DH respectivamente, tenemos que HEB HAB ABD

Problema 9



La altura AD de un triángulo ABC es el diámetro de un círculo tal como se muestra en la figura. El triángulo ABC es equilátero. El círculo intercepta a AB y AC en E y F respectivamente. Hallar: $\frac{EF}{BC}$

Fuente: The Bernouilli Trials 2001-Problema 3

Solución:

La solución es por demás sencilla: $\frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{AE/AD}{AB/AD}=\frac{\cos 30^o}{\sec 30^o}=\frac{3}{4}$

Solución: Ian VanderBurgh and Christopher Small, con traducción por Aldo Gil

Problema 10

Resolver para los números reales la ecuación. $2x^2-3x=1+2x\sqrt{x^2-3x}$

Fuente: Republica de Moldavia-XL Olympiad – 1996 –Problema 6

Solución:

La ecuación dada

$2x^2-3x=1+2x\sqrt{x^2-3x}$, es

equivalente es:

$x^2-2x\sqrt{x^2-3x}+x^2-3x=1$, ó

$(x-\sqrt{x^2-3x})^2-1=0$, ó

$(x-\sqrt{x^2-3x}-1).(x-\sqrt{x^2-3x}+1)=0$

La ecuación $(x-\sqrt{x^2-3x}-1)=0$, no tiene raíces, mientras que la ecuación: $(x-\sqrt{x^2-3x}+1)=0$, tiene por raíz

$x=-\frac{1}{5}=-0.2$

Solución: by Pierre Bornsztein,

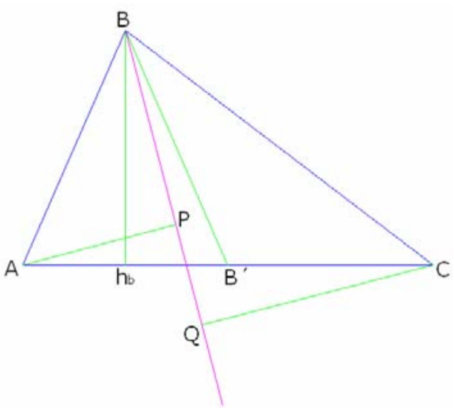
Y se nos fue el número 42, como un juego nos acercamos al número 50 de nuestra revistita, y pues allí dándole con el entusiasmo de siempre, y no me digan que no llegamos ya que tengo material para unos 8 o 9 números, es decir que pasamos sobrado.

Obviamente si por allí haya algunos aportes, ideas, teoremas olvidados, en fin cualquier cosita, pues sea bienvenida.

Un abrazo

Aldo

Posdata: Recuerdan que el número pasado, les comente algo de algunos teoremas olvidados, pues aquí les paso uno, ojala les sirva, los tome de un articulo de la revista Matemathics Reflections, From Baltic Way to Feuerbach- a geometrical excursión. Este articulo muestra varios teoremas, para resolver problemas de las pruebas de Baltic Way, y este me gusto bastante. (La demostración queda por cuenta de ustedes).



Sea ABC un triángulo y $B´$ el punto medio de AC. Denotamos como h_b el pie de la altura de B del triángulo ABC, y P y Q las proyecciones ortogonales de A y C sobre la bisectriz del ángulo ABC. Entonces los punto h_b, $B´$, P y Q están en la circunferencia de un círculo.

Hasta la próxima............