

Problema 1

Resolver la siguiente criptoaritmética, donde letras iguales son cifras iguales y letras diferentes representan letras diferentes.

$$\begin{array}{r} \text{T R I E D} \\ + \text{D R I V E} \\ \hline \text{R I V E T} \end{array}$$

Fuente: High School Problem Archive-Problema 89-Missouri State

Solución:

Claramente:  $V=0$  (si no "llevamos" de la cifra de las unidades) ó  $V=9$  (si "llevamos").

Caso 1 ( $V=0$ ): Entonces debemos tener  $I=5$  y en consecuencia  $R= 2$  ó  $7$ . Sin embargo si  $R=2$ , entonces  $R, T, y E$  no pueden ser distintos, por lo tanto  $R=7$ . En consecuencia  $T+D=6$ . Pero  $1 + 5 = 6$  resulta que se duplica la cifra 5, y  $3 + 3 = 6$  implica que repite el 3, así que la única posibilidad es  $2 + 4 = 6$ . Si  $T=2$  y  $D=4$ , debemos llevar en la columna de las unidades, lo cual contradice los su-

puesto inicialmente. Si  $T=4$  y  $D=2$ , entonces  $E=2$  y tenemos un 2 repetido. Este caso es imposible.

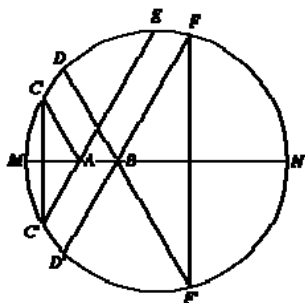
Caso 2 ( $V=9$ ): Entonces debemos tener  $I=4$  y en consecuencia  $R=2$  ó  $7$ . Como en el caso anterior,  $R=2$  es excluido, por lo tanto  $R=7$  y  $T+D= 6$ . En este caso,  $1+5=6$  es la única solución donde no hay cifras repetidas. Debemos "llevar" de la primera columna, de aquí  $T=1, D=5$  y  $E=6$ . Por consiguiente la solución es:  $17465+57496=74961$ .

Solución: Los proponentes y traducción por Aldo Gil C.

Problema 2

A y B son dos puntos en el diámetro MN de un semicírculo. C, D, E y F son puntos en el semicírculo tales que  $\angle CAM = \angle EAN = \angle DBM = \angle FBN$ . Probar que  $CE = DF$ .

Solución



Este problema causó considerable dificultad para los estudiantes, aunque no es duro para todos. Los estudiantes tenían dificultad para dibujar el diagrama correcto, y muchos asumieron en forma incorrecta  $AM = BN$  que convierte el problema en trivial. Otros demostraron que  $\angle CAE = \angle DBF$ , y esto exigió que  $CE = DF$  sin ninguna justificación. Otros simplemente asumieron que  $CE=DF$ .

Completamos el círculo. Prolongamos EA hasta cortar

a  $C'$ , y prolongamos  $DB$  hasta cortar en  $F'$ . Por simetría,  $AC = AC'$  tal que  $\angle AC'C = \angle ACC'$ . En forma similar,  $\angle BF'F = \angle BFF'$ . Ahora  $\angle EC'C = 180^\circ - \angle CAC' = 180^\circ - 2\angle CAM = 180^\circ - 2\angle FBN = 180^\circ - \angle FBF' = \angle DF'F$ . Desde que los arcos  $CE$  y  $DF$  subtenden ángulos iguales en el círculo, tienen igual medida. De aquí las cuerdas  $CE$  y  $DF$  son iguales.

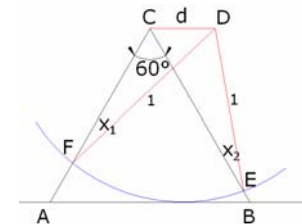
Solución: Byung-Kyu Chun of Harry Ainlay High School-Traducción de Aldo Gil.

Problema 3

Sea  $ABC$  un triángulo equilátero de altura 1. Un círculo con radio 1 y centro en el mismo lado de  $AB$  y  $C$  rueda sobre  $AB$ . Probar que el arco del círculo que esta dentro del triángulo tiene siempre la misma longitud.

Fuente: 31° Olimpiada Canadiense de Matemática – 1999 – Problema 2

Solución



El círculo rodante intercepta a  $CB$  y  $CA$  en  $E$  y  $F$  respectivamente.  $D$  es el centro del círculo.

$$\angle CED = x_1, \angle CFD = x_2, \angle DCE = 60^\circ, \angle DCF = 120^\circ.$$

$$\overline{CD} = d, DE = DF = 1.$$

De la ley de senos en el triángulo  $CDE$ , tenemos:

$$\frac{d}{x_1} = \frac{1}{\text{sen}60^\circ} \Rightarrow \text{sen}x_1 = d \text{sen}60^\circ$$

$$\Rightarrow \text{sen}x_1 = \text{sen}x_2$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x$$

$\Rightarrow$  el cuadrilátero  $CDEF$  puede ser inscrito en un círculo.

$$\Rightarrow \angle EDF = \angle ECF = \angle BCA = 60^\circ = \text{constante.}$$

Solución: D. J. Smeenk, the Netherlands-Traducción de Aldo Gil C.

Problema 4

Tres personas (Alan, Ben y Chris), juntos poseen un cierto número de soberanos de oro y poseen la mitad, la tercera y la sexta parte del número total respectivamente.

Todos los soberanos se amontonaron en una mesa y cada uno de ellos tomó una parte del montón de tal modo que no quedara ninguno.

Después de un rato:

Alan devolvió la mitad de los soberanos que había tomado.

Ben devolvió la tercera parte de lo que había tomado.  
 Chris devolvió una sexta parte de lo que había tomado.  
 Finalmente cada uno de los tres se queda con una cantidad igual de lo que se había devuelto a la mesa.  
 Sorprendentemente, cada uno tenía el número de soberanos que realmente le pertenecían.  
 ¿Cuál es el número más pequeño de soberanos para que esta extraña transacción funcione? ¿Cuánto agarró cada persona del montón?

Fuente: *Leonardo's Problem-N Rich- Published December 1998-Traducido por Aldo Gil C.*

**Solución**

Para encontrar la solución a este problema, encontraremos expresiones para las cantidades de Alan, Ben y Chris ( $A$ ,  $B$  y  $C$  respectivamente) en términos del número total ( $T$ ). Esto da:

$$A = \frac{T}{2} \quad \left| \quad B = \frac{T}{3} \quad \right| \quad C = \frac{T}{6}$$

Primero:  $A = \frac{3B}{2}$ ; y también:  $A = 3C$  y  $B = 2C$

Encontré cuanto se devuelve a la mesa, en términos del número de soberanos que cada uno tomó ( $a$ ,  $b$  y  $g$  respectivamente):

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{g}{6} = \frac{3a+2b+g}{6}$$

Entonces  $A$ ,  $B$  y  $C$  en términos de  $a$ ,  $b$  y  $g$ :

$$A = \frac{a}{2} + \frac{3a+2b+g}{18}$$

$$B = \frac{2b}{3} + \frac{3a+2b+g}{18}$$

$$C = \frac{5g}{6} + \frac{3a+2b+g}{18}$$

(Donde  $\frac{3a+2b+g}{18}$  es una porción igual

de la cantidad devuelta a la mesa)

$$A = \frac{12a+2b+g}{18}$$

$$B = \frac{3a+14b+g}{18}$$

$$C = \frac{3a+2b+16g}{18}$$

Conociendo estas relaciones entre  $A$  y  $B$ ;  $A$  y  $C$ ; y  $B$  con  $C$ , encuentro las ecuaciones simultáneas:

$$15a - 38b - g = 0$$

$$3a - 4b - 47g = 0$$

$$3a - 10b + 31g = 0$$

Esto no tiene una única solución pero obtenemos:

$$b = 13g$$

$$a = 33g$$

Poniendo estas expresiones para  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $T$  tenemos:

$$A = \frac{47g}{2}; B = \frac{47g}{3}$$

$$C = \frac{47g}{6}; T = 47g$$

El menor valor de  $g$  que da un número entero de soberanos es 6, en este caso:

$$T = 282; A = 141; B = 94; C = 47$$

$$a = 198; b = 78; g = 6$$

Así Alan toma 198, Ben toma 78 y Chris toma 6 soberanos.

Solución: Resuelto por Edwin Taylor y traducción de Aldo Gil C.

**Problema 5**

El ángulo  $x$  satisface la ecuación:  $a \operatorname{sen} x + b \operatorname{cos} x = c$ . Si  $a, b, c$  son números reales, calcular el ángulo  $x$ .

Fuente: *Nikolaos Dergiades, Greece, Revista Crux-2000-Problema 2563*

**Solución:**

Si  $a=b=0$ , entonces no hay solución cuando  $c \neq 0$ . Suponer ahora que  $a^2 + b^2 \neq 0$ . La ecuación dada puede ser escrita como:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{sen} x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{cos} x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ó  $\operatorname{cos}(x - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , donde  $\alpha$  es de-

terminado por:  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  y

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

De aquí tenemos las siguientes consecuencias:

Si  $c^2 > a^2 + b^2$ , la ecuación no tiene solución. Si  $c^2 \leq a^2 + b^2$ , definimos  $\beta$  como

$\operatorname{cos} \beta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ , y la ecuación se vuelve  $\operatorname{cos}(x - \alpha) = \operatorname{cos} \beta$ , cuyas soluciones

son los números reales  $\alpha + \beta + 2k\pi$  y  $\alpha - \beta + 2k\pi$  (para todos los enteros  $k$ )

**Problema 6**

En un triángulo  $ABC$ , los puntos  $P$  y  $Q$  están en  $BC$  tales que  $AP$  y amantes de  $\angle BAC$  y  $BQ=QC$ . Si  $AC = \sqrt{2} AQ$ , encontrar la medida de  $\angle BAC$ .

Fuente: *Propuesto por K.R.S Sastry aparecido en revista Crux-2000-Problema 2567*

**Solución:**

Si los lados del triángulo  $ABC$  son  $a, b, c$   $AQ = \frac{b\sqrt{2}}{2}$ , y  $BQ=QC = \frac{a}{2}$ . Sea  $\theta = \frac{A}{3}$ . Por (en notación usual), entonces  $AC = b$ ,



En total, tenemos que abrir y cerrar 4 eslabones como mínimo, con un costo total de:  $4 \cdot (27 + 17 \cdot 25) = 177$  pesos.

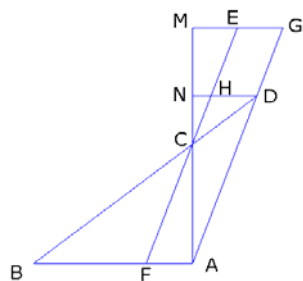
*Solución: Diana Barredo, recopilado por Aldo Gil C.*

**Problema 10**

Sea  $ABC$  un triángulo tal que  $\frac{|BC|}{|AB| - |BC|} = \frac{|AB| + |BC|}{|AC|}$ . Determine la relación  $\angle A : \angle C$ .

En un triángulo  $ABD$ , la base  $AB$  mide 40. Se levanta por  $A$  una perpendicular que corta a  $BD$  en  $C$ , siendo  $CD=9$ . Se toma un punto  $F$  en  $AB$  a 10 de  $B$ , que pasa por  $C$  interceptando a  $AD$  en  $E$ , tal que  $ED$  es 5. Hallar la longitud de los lados del triángulo.

*Fuente: Olympic Mathematics Correspondence Problemas-Año 2002-Problema 57*



**Solución:**

Trazamos  $DHN$  perpendicular a  $AC$ , y  $MEG$  paralela a  $DN$ , cortando a  $BD$  en  $G$ . Sea  $AB=a=40$ ,  $BF=b=10$ ,  $AC=c=9$ ,  $DE=d=5$ ,  $EG=x$  y  $HD=y$ .

Sea  $ABCD$  un rectángulo y sea  $E$  un punto en la diagonal  $BD$  con  $\angle DAE=15^\circ$ . Sea  $F$  un punto en  $AB$  con  $EF$  perpendicular a  $AB$ . Si sabemos que:

$$EF = \frac{1}{2} AB \text{ y } AD = a. \text{ Encontrar la medida del ángulo}$$

$\angle EAC$  y la longitud del segmento  $EC$ .

*Solución: Los editores y traducción por Aldo Gil C.*

*Y se nos fue el 41, seguimos fuertes, por allí husmeando, me encuentro algunos teoremas un poco olvidados (según los autores), para mí ignorados, porque no tenía ni idea del asunto, estoy buscando las fuentes originales para ponerlos aquí, vamos a ver que tal nos va.*

*Esto no es spam, visiten la página d mi amigo Ernesto*

<http://www.geolay.com/aportes2/aldojuan.htm>

Abrazos

Aldo