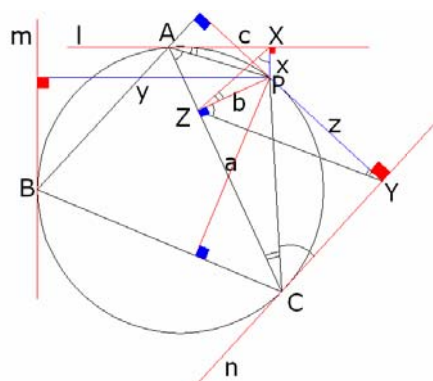


No se si pasa en vuestra tierra, pero el numerito (40), les causa pavor a las damas cuando se les acerca el bendito cumpleaños, y comienzan a cumplir los 39, 38 ....., y así sucesivamente. ¿Por qué ah?, para mi es tan lindo avejentar, me doy cuenta que largo mucha experiencia, me siento cada vez mas rejuvenecido, me alisto para un mundo mejor (aquí en la tierra), y pues ...joder lucho por ello. Ojo que esta es una reflexión a modo de broma, no se me vayan a enojar las amigas de la red. El mocoso Aldo (que fue.....)

**Problema 1**

Por los vértices de un triángulo ABC se trazan las tangentes al su circuncírculo. Las distancias de un punto arbitrario tomado en el círculo a los lados son a,b,c y la distancia a las tangentes son x,y,z. Probar que  $a^2+b^2+c^2=xy+xz+yz$ .

Fuente: XL Mathematical Olympiad 1996 República de Moldavia – Problema 3



**Solución**

Sea el triángulo ABC, y sea T su circuncírculo, y sean l,m,n las tangentes de T por A,B,C, respectivamente. Suponemos que P es un punto en T, y que a,b,c, son las distancias de P a BC,CA,AB respectivamente, y que x,y,z, son las distancias de P a l,m,n respectivamente. Sean X,Y y Z, los pies de las perpendiculares de P a l,n y AC, respectivamente.

Entonces  $PX = x$ ,  $PY = z$ , y  $PZ = b$ . Desde que  $\angle PXA = \angle PZA = 90^\circ$ , tenemos que P, X, A, Z son concíclicos, y en forma similar P, Y, C, Z, son concíclicos. Desde que AX es tangente a T, tenemos:  $\angle PZX = \angle PAX = \angle PCA = \angle PCZ = \angle PYZ..... (I)$

En forma similar tenemos:  $\angle PXZ = \angle PAZ = \angle PAC = \angle PCY = \angle PZY..... (II)$

De (I) y (II). Tenemos,  $\Delta PXZ \sim \Delta PZY$ , por lo que:  $PX:PZ = PZ:PY$ ; esto es:  $PZ^2 = PX.PY$ . Esto implica que  $b^2 = xz$ . En forma similar tenemos que:  $a^2 = yz$  y  $c^2 = xy$ . De aquí obtenemos:  $a^2+b^2+c^2=xy+xz+yz$ .

Solución: Mohammed Aassila, Strrasbourg Francia y traducción con adaptación por Aldo Gil

**Problema 2**

En un triángulo ABC, la bisectriz de  $\angle BAC$  corta a BC en el punto D. Supongamos que T es el círculo tangente a BC en D y pasa por A. Sea M el punto de intersección de T y AC y BM que cortan el círculo en P. Probar que AP es la mediana del triángulo ABD.

Fuente: Iranian Mathematical Olympiad 1998-1999 – Third Round –Problema 5

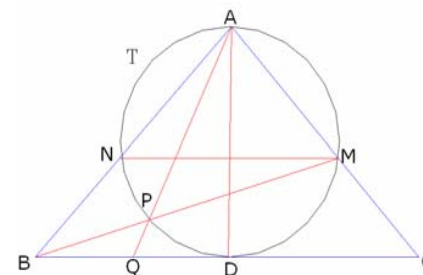
**Solución**

Sea N el punto de intersección de T y AB, y sea la prolongación de AP que corta a BC en Q. Sabiendo que el ángulo entre una tangente y una cuerda es igual al ángulo subtendido por la cuerda a un punto en la circunferencia en el lado opuesto de la cuerda, tenemos  $\angle MDC = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle A$ . Enton-

ces:

$$\begin{aligned} \angle ADM &= \angle ADC - \angle MDC. \\ &= (180^\circ - \angle CAD - \angle DCA) - \angle MDC \\ &= (180^\circ - \frac{1}{2} \angle A - \angle C) - \frac{1}{2} \angle A \\ &= 180^\circ - \angle A - \angle C = \angle B. \end{aligned}$$

También,  $\angle ADM = \angle ANM$ , desde que estos ángulos están subtendidos por el mismo arco de T. Así,  $\angle ANM = \angle B$  (lo cual muestra que NM es paralela a BC). De aquí:  $\angle QPB = \angle APM = \angle ANM = \angle B$ . Desde que también tenemos  $\angle BQP = \angle BQA$ , los triángulos BPQ y ABQ son semejantes. Entonces por lados proporcionales, tenemos:



$\frac{BQ}{QA} = \frac{QP}{BQ}$ , Resultando  $BQ^2=QP.QA$ . También tenemos que  $QP.QA = QD^2$  (potencia de un punto con respecto a T). De aquí  $BQ=QD$ , estableciendo que AP es la mediana del triángulo ABD.

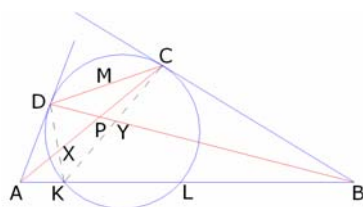
Solución: Miguel Amengual Covas, Mallorca – España- traducción y adaptación por Aldo Gil C.

**Problema 3**

Un círculo es tangente a los lados BC, y AD de un cuadrilátero convexo ABCD en los puntos C, D respectivamente. El mismo círculo intercepta el lado AB en los puntos K y L. Las líneas AC y BD se cortan en P. Sea M el punto medio de CD. Probar que si  $CL = DL$ , entonces los puntos K,P,M son colineales.

Fuente: Propuesto por Waldemar Pompe, aparecido en Revista Crux Año 2000-Problema 2513

**Solución**



Sean X e Y las intersecciones de DK con AC, y CK con BD respectivamente tal como se muestra en la figura.

En consecuencia:  $\angle AKD = \angle BKC \dots(I)$

(Luego arco CL = arco DL,  $\angle CKL = 180^\circ - \angle DKL = \angle DKA$ ). El círculo dado es tangente a los lados BC y AD de donde obtenemos  $\angle ADK = \angle DCK$  y  $\angle BCK = \angle CDK \dots\dots(II)$

De acuerdo con el teorema de Ceva (y debido a que  $DM = MC$ ), los puntos K,P,M son colineales, sí y solo sí:  $\frac{KX}{XD} = \frac{KY}{YC}$ .

Denotamos [TUV] el área del triángulo TUV. Entonces la igualdad puede ser re-escrita como se muestra:

$$\frac{[AKC]}{[ADC]} = \frac{[BKD]}{[BCD]} \quad \text{ó} \quad \frac{[AKC]}{[BKD]} = \frac{[ADC]}{[BCD]}$$

usando las ecuaciones (I) y (II), vemos que la última ecuación es equivalente a:

$$\frac{AK \cdot KC}{BK \cdot KD} = \frac{AD}{BC} \dots\dots\dots(III)$$

Necesitamos probar (III). Para hacer esto, nosotros empezamos con la siguiente igualdad

$$\frac{[AKD]}{[DCK]} \cdot \frac{[DCK]}{[BKC]} = \frac{[AKD]}{[BKC]}$$

usando las igualdades (I) y (II) una vez más, tenemos:

$$\frac{AD \cdot KD}{DC \cdot KC} \cdot \frac{KD \cdot DC}{KC \cdot BC} = \frac{AK \cdot KD}{BK \cdot KC}$$

$$\text{ó} \quad \frac{AD \cdot KD}{KC \cdot BC} = \frac{AK}{BK}, \text{ lo cual es equivalente a}$$

(III). Por esta razón los puntos K,P y M son colineales.

*Solución: Por el proponente, traducción y adaptación por Aldo Gil C.*

**Problema 4**

Distintos trinomios cuadrados  $f(x)$  y  $g(x)$  tienen como coeficiente principal la unidad. Sabemos que:  $f(-12) + f(2000) + f(4000) = g(-12) + g(2000) + g(4000)$ . Encontrar los valores reales de x que satisfacen la ecuación  $f(x) = g(x)$ .

*Fuente: XL Mathematical Olympiad 1996 República de Moldavia – Problema 3*

**Solución:**

Sean  $f(x) = x^2 + ax + b$  y  $g(x) = x^2 + cx + d$  dos trinomios cuadrados distintos.

De la inecuación dada, tenemos  $1996a + b = 1996c + d$ .

Así tenemos:  $a \neq c$  y  $b \neq d$ .

Por consiguiente:  $x = 1996$  es la única raíz de la ecuación  $f(x) = g(x)$ .

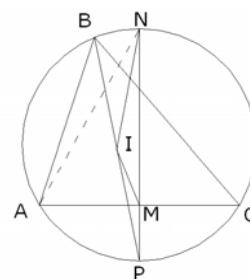
*Solución: Mohammed Aassila, Strrasbourg Francia y traducción con adaptación por Aldo Gil*

**Problema 5**

Sea ABC un triángulo con incentro I, tal que  $AB < BC$ . Sea M el punto medio del lado AC y N punto medio del arco ABC de la circunferencia circunscrita al triángulo. Probar que  $\angle IMA = \angle INB$ .

*Fuente: Selección para XV Olimpiada Rioplatense de Matemática-Sección Brasil*

**Solución:**



Sea P el punto medio del arco AC de la circunferencia circunscrita que no contiene a B. Entonces P,I,B y P,M,N son ternas de puntos colineales. Además es muy conocido que  $PA = PI$ .

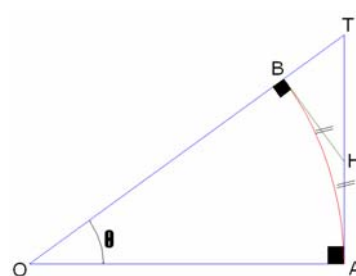
Como el triángulo PAN es rectángulo en A, tenemos por relaciones métricas que  $PN \cdot PM = PA^2 = PI^2$ , y de ahí:

$$\frac{PN}{PI} = \frac{PI}{PM}$$

$\approx \angle PIM$ . Luego,  $\angle IMP = \angle PIN$ . Como  $\angle PMA = 90^\circ$ , por el teorema del ángulo externo tenemos que:  $\angle IMA + 90^\circ = \angle IBN + \angle BNI = \angle PBN + \angle BNI = 90^\circ + \angle BNI$ . Relación que satisface la igualdad pedida.

*Solución: Los proponentes, dibujo y traducción por Aldo Gil*

**Problema 6**



Probar que para:  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $\tan \theta + \sen \theta > 2\theta$ .

*Fuente: Vedula N. Murty, India aparecido en Revista Crux 2000- Problema 2585*

**Solución**

Sea OAB un sector de centro O, radio 1 y  $\angle AOB = \theta$ , donde  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

Sea T el punto de intersección de OB y la tangente del arco AB en A. Sea H el punto de intersección de AT y la tangente del arco AB en B. Entonces:

$\angle OAH = \angle OBH = 90^\circ$  y  $AH = HB$ . Luego  $\angle TBH = 90^\circ$ ,  $TH > HB = HA$ . Sea  $[F]$  el área de la figura plana  $F$ . Entonces  $HA < TH$  implica:  $[HAB] = [HBT]$ , y por consiguiente,  $[sector OAB] - [OAB] < [OAT] - [sector OAB]$

Solución: Toshio Seimiya, Kawasaki Japón

La última inecuación puede ser escrita como:  $\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\text{sen } \theta < \frac{1}{2}\tan \theta - \frac{1}{2}\theta$  ó  $2\theta < \tan \theta + \text{sen } \theta$ , que es la desigualdad deseada.

**Problema 7**

Suponiendo que  $AD$ ,  $BE$  y  $CF$  son las bisectrices interiores del triángulo  $ABC$ , con  $D, E$  y  $F$  en  $BC$ ,  $CA$  y  $AB$  respectivamente. Llamamos  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ ,  $x = AE$  y  $y = AF$ . Si tenemos que  $x + y = a$ . Probar que:

- a)  $a^2 = bc$ .
- b)  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ ;
- c)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \left(\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$

Fuente: D.J Smeenk, Netherlands, aparecido en revista Crux-2000- Problema 2598

**Solución**

$$\frac{x}{b-x} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow ax = bc - cx$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{bc}{a+c}$$

$$\frac{y}{c-y} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow ay = bc - by$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{bc}{a+b}$$

$$a) \ x + y = a = \frac{bc}{a+c} + \frac{bc}{a+b}$$

Solución: C. Festraets-Hamoir, Brussels, Belgium y traducción con palomillada de Aldo Gil

**Problema 8**

Expresar  $\cos(t)$  como una función racional de  $\cos^3 t$  y  $\sin^3 t$ , por ejemplo, encontrar las polinomiales  $P(x,y)$  y  $Q(x,y)$  tales que  $\cos(t) = \frac{P(\cos^3 t, \sin^3 t)}{Q(\cos^3 t, \sin^3 t)}$ .

Fuente: I. S. Cohen

**Solución**

$$P(x,y) = x(2 + x^2 + y^2),$$

$$Q(x,y) = 1 + 2x^2 - y^2$$

$$P(x,y) = (1 + 2x^2 - y^2)^2,$$

$$Q(x,y) = x(2 + x^2 + y^2)^2$$

La primera puede ser desarrollada como sigue:

$$(\cos^2 t + \sin^2 t)^3 = 1$$

$$\cos^6 t + 3\cos^2 t \sin^2 t [\cos^2 t + \sin^2 t] + \sin^6 t = 1$$

De aquí:

$$\cos^2 t \sin^2 t = \frac{\cos^6 t + \sin^6 t}{3}$$

bién tenemos:

$$\begin{aligned} \cos^2(t) &= \cos^2(t)[\cos^2(t) + \sin^2(t)] \\ &= \cos^4(t) + \cos^2(t)\sin^2(t) \end{aligned}$$

Solución: Chris of Canada and Matt Hudelson of Washington State University

**Problema 9**

Este problema es para ponerle un marco:

Evaluar el producto:  $(\sqrt{3} + \tan 1^\circ)(\sqrt{3} + \tan 2^\circ)(\sqrt{3} + \tan 3^\circ) \dots (\sqrt{3} + \tan 29^\circ)$ .

Fuente: Mathematical Reflections 1-2007 - Problema J39 por Tito Andreescu

**Solución:**

Sea  $A =$

$$(\sqrt{3} + \tan 1^\circ)(\sqrt{3} + \tan 2^\circ)(\sqrt{3} + \tan 3^\circ) \dots (\sqrt{3} + \tan 29^\circ),$$

tenemos:

$$\sqrt{3} + \tan 1^\circ = \tan 60^\circ + \tan 1^\circ =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\text{sen}60^\circ \cdot \text{sen}1^\circ + \cos 60^\circ \cdot \text{sen}1^\circ}{\cos 60^\circ \cdot \cos 1^\circ} = \frac{\text{sen}61^\circ}{\cos 60^\circ \cdot \cos 1^\circ} \cdot \frac{\text{sen}62^\circ}{\cos 60^\circ \cdot \cos 2^\circ} \dots\dots\dots \\ & = \frac{\text{sen}61^\circ}{\cos 60^\circ \cdot \cos 1^\circ} \cdot \text{Análogamente obtenemos: } \frac{\text{sen}89^\circ}{\cos 60^\circ \cdot \cos 29^\circ} = \left(\frac{1}{\cos 60^\circ}\right)^{29} = 2^{29} \\ & \sqrt{3} + \tan 2^\circ = \frac{\text{sen}62^\circ}{\cos 60^\circ \cdot \cos 2^\circ}, \\ & \sqrt{3} + \tan 29^\circ = \frac{\text{sen}89^\circ}{\cos 60^\circ \cdot \cos 29^\circ}. \end{aligned}$$

Esto es:  
*Solución: Courtis Chryssostomos, Grecia y traducción por Aldo Gil Crisóstomo*

**Problema 10**

*Este problema es brillante, por el método deductivo e inductivo, y Jimmy Chui de la Universidad de Toronto, escribió la solución al problema en el 2001, y apareció en la Revista Crux (Canadá). Realmente es espectacular la forma de solución, muy buena .....*

Hallar la suma de las series  $\frac{25}{72} + \frac{25}{90} + \frac{25}{110} + \frac{25}{132} + \dots + \frac{25}{9900}$ .

*Fuente: 1996 Cayley – Problema 24*

**Solución:**

En este problema debemos hallar un patrón de formación, y a través de el, encontrar un método que simplifique el problema.

Los numeradores son todos iguales a 25, y los denominadores son 72=8.9; 90=9.10; 110=11.10.....y finalmente 9900=99.100.

Si sumamos la primera fracción con la segunda, colocando los denominadores como se ha expuesto. Tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{25}{72} + \frac{25}{90} &= 25 \cdot \left(\frac{10}{720} + \frac{8}{720}\right) \\ &= 25 \cdot \frac{18}{720} = 25 \cdot \frac{1}{40} \end{aligned}$$

Si añadimos la tercera fracción tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{25}{40} + \frac{251}{110} &= 25 \cdot \left(\frac{11}{440} + \frac{4}{440}\right) \\ &= 25 \cdot \frac{15}{440} = 25 \cdot \frac{3}{88} \end{aligned}$$