

Aquí amigos continuamos como siempre poniendo más problemitas, creo que en este voy a hacer abuso con Geometría, pero bueno, es lo que he tenido a la mano.

Problema 1

Sean TQ y TR diámetros de un círculo con centro O . TO es bisecado en X , y trazamos PQ . En PQ levantamos la perpendicular XW y en PR , la perpendicular QV . Probar que: $OX.PV=PW.PQ$.

Fuente: American Mathematical Montly – Problema 2823 by S.A. Corey

Solución

Debido a que TQ es diámetro, tenemos que TP es perpendicular a PQ . Así TP es paralela a XW . Trazamos OF paralela a TP , F en PQ . Ahora es fácil saber que $PW=WF$ y entonces $PW = \frac{PQ}{4}$. Sea a el ángulo RPQ . Luego usando el triángulo VQP tenemos: $\frac{PV}{PW} = \frac{4PV}{PQ} = 4 \cos a$. Por

otro lado, $PQ=2PF$ y $OX = \frac{PO}{2}$. Así: $\frac{PQ}{OX} = \frac{PF}{PO}$. Usando el triángulo PFO tenemos que $\cos a = \frac{PF}{PO}$. Así $\frac{PQ}{OX} = \frac{PV}{PW}$, y de aquí: $PQ.PW=OX.PV$.

Solución: Resuelto por Martin Dimitrov, 5 Sep 2002:

Problema 2

Suponiendo que a , b y c son números reales positivos y se cumple que $a^2+b^2+c^2=1$, probar que: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3 + \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc}$

Fuente: Propuesto por Hojoon Lee, aparecido en Revista Crux Año 2000-Problema 2532

Solución

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - 3 - \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{b^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c^2} \\ & \quad - 3 - \left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}\right) \\ &= a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + b^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + c^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2\left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}\right) \\ &= a^2\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + b^2\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 + c^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 \geq 0 \\ & \text{Con igualdad sí y solo sí } a=b=c. \end{aligned}$$

Solución: Richard B. Eden, Ciudad de Manila, Philippines y traducción de Aldo Gil C.

Problema 3

La fecha del último lunes del mes pasado sumada a la del primer viernes del mes que viene da 37. Si todas las fechas ocurren en el presente año. ¿En qué mes estamos?

Fuente: Propuesto por S L –Lima Perú Marzo 2007

Solución

- a) El último lunes de un mes puede estar entre el 22 y el 31.
- b) El primer viernes de un mes puede estar entre el 1º y el 7.
- c) Las dos únicas combinaciones son "31+6" o bien "30+7".
- d) Tengo una fórmula para calcular días de la semana, es bastante fácil y se puede hacer a mano, pero sino, "cazamos" un almanaque y vemos que:

Lunes 31 sólo en septiembre y diciembre, viernes 6 sólo en abr y jul.
La combinación restante es justamente a la inversa:
Lunes 30 sólo en abril y julio, viernes 7 sólo en septiembre y diciembre.
Sólo resuelve el problema lunes 30 de julio y viernes 7 de septiembre.
Estamos en agosto.

Solución: Daniel Ricardo Suárez

Problema 4

Este problemilla, aunque bastante clásico, es bueno ponerlo porque nos permite resolver triángulos dadas las alturas del mismo, y a partir de aquí hallar mediatrices, medianas, etc., de repente se les ocurre generalizarlo, OK?, queda como ejercicio.

Hallar las longitudes de los lados de un triángulo, cuyas alturas son 20, 28 y 35 metros.

Fuente: Mayhem Problemas Revista Crux – problema H 269- Año 2000

Solución:

Sean a, b, c los lados del triángulo correspondientes a las alturas 20, 28 y 35 respectivamente, y sea A el área del triángulo. Esto es: $2A = 20a = 28b = 35c$, de donde $b = \frac{5a}{7}$ y $c = \frac{4a}{7}$. Si s es el semiperí-

metro del triángulo, entonces $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{8a}{7}$. Por la fórmula de Herón, tenemos:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{8a}{7}\right)\left(\frac{a}{7}\right)\left(\frac{3a}{7}\right)\left(\frac{4a}{7}\right)} = \frac{4a^2\sqrt{6}}{49}. \end{aligned}$$

Pero, como $A=10a$, de aquí: $a = \frac{245\sqrt{6}}{12}$ | $b = \frac{175\sqrt{6}}{12}$ $c = \frac{35\sqrt{6}}{3}$.

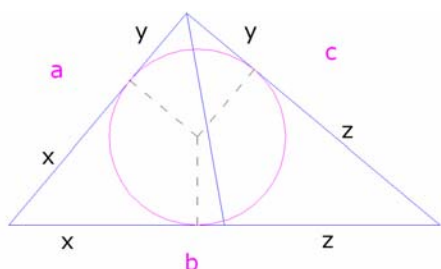
Solución: Michel Bataille y traducción por Aldo Gil

Problema 5

Probar que el radio del círculo inscrito en un triángulo corta a una de las medianas si y solo si sus lados son proporcionales a 5, 10, 13.

Fuente: Foros de Matemática – el manco– Marzo 2006

Solución:



Con la notación del dibujo:
 $a = x + y$; $b = x + z$; $c = y + z$.
 Además, llamamos M a la mediana del lado b y $k = M/3$.

Para que el triángulo cumpla la condición, aplicando potencia en un punto se tiene:

$$y^2 = 2k^2; \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = 2k^2;$$

$$c^2 = a^2 + 2M^2 = a^2 + 18k^2 = a^2 + 9y^2$$

Ponemos c en función de a e y , es decir, $c = y + z = y + a + y$. Queda:

$$(a + 2y)^2 = a^2 + 9y^2 \Rightarrow 4a = 5y \Rightarrow$$

$$y = \frac{4a}{5}. \text{ Por tanto:}$$

$$c = a + 2y = a + \frac{8a}{5} = \frac{13a}{5}$$

En definitiva haciendo $a=5$ queda $b=2a =$

$$10, c = \frac{13a}{5} = 13.$$

Por tanto

$$y = \frac{b}{2} - x \Rightarrow a = x + y = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 2a y$$

$\leq a + y$.

Ahora aplicamos dos veces el teorema del coseno, en los triángulos formados por c ,

M y $\frac{b}{2} = a$ uno, y $a, \frac{b}{2} = a$ y M el otro:

$$c^2 = a^2 + M^2 + 2aM\cos D$$

$$a^2 = a^2 + M^2 - 2aM\cos D$$

Sumando queda:

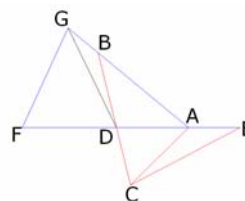
Solución: el manco – Octubre 2006

Problema 6

En un triángulo ABC , $\angle ABC=60^\circ$ y $\angle ACB=70^\circ$. El punto D esta en el segmento BC tal que $\angle BAD = 20^\circ$. Probar que $AB+BD=AD+DC$.

Fuente: Propuesto por Ho-joo Lee, Korea aparecido en Revista Crux Año 2000-Problema 2511

Solución:

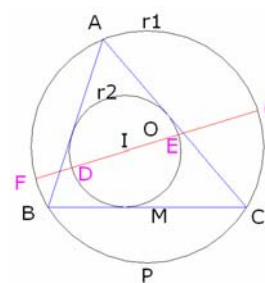


En la prolongación de AD , tomamos $AE=DF=DC$, y en AB , tomamos $AG=AF$. En consecuencia $\angle DAC=30^\circ$ y $\angle ADC=80^\circ$ (N.T. verificar y demostrar esta parte, ya que se hace referencia a una demostración posible, anterior), concluimos que el triángulo EDC es isósceles, con $\angle DEC = \angle GAF = 20^\circ$, lo cual significa $\triangle EDC \approx \triangle AGF$. De aquí

$GF=DC=DF$, y $\angle GDF = 50^\circ$, por lo que $\angle BDG = 30^\circ$, y así $\angle BGD=30^\circ$, para que $BG=BD$. En consecuencia $AB+BD=AG=AF=AD+DC$.

Solución: Nicolás Dergiades, Thessaloniki, Greece y traducción por Aldo Gil.

Problema 7



Una recta que pasa por el incentro I del triángulo ABC intercepta a la circunferencia inscrita $r_1(O;R)$ de ABC en los puntos F y G , y al incírculo $r_2(I;r)$ en los puntos D y E , con D entre I y F . Probar que $DF \cdot EG \geq r^2$

Solución:

$$DF \cdot EG = (FI-DI)(GI-EI) = (FI-r)(GI-r) = FI \cdot GI - (FI+GI) \cdot r + r^2 = -Pot_{r_1}(I) - FG \cdot r + r^2.$$

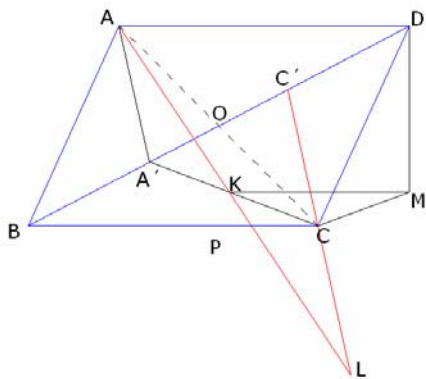
Por la relación de Euler, tenemos que: $OI^2 = R^2 - 2Rr$, y asimismo $Pot_{r_1}(I) = OI^2 - R^2 = -2Rr$. Queremos demostrar entonces que $2Rr - FG \cdot r + r^2 \geq r^2 \Leftrightarrow 2R \geq FG$, que es verdadera, pues FG es una cuerda de r_1 . La igualdad se da, si y solo si FG es diámetro de r_1 .

Problema 8

Los puntos A' y C' se toman en la diagonal BD del paralelogramo $ABCD$, tal que $AA' \parallel CC'$. El punto K esta en el segmento $A'C'$, y AK corta $C'C$ en L . Una paralela a BC es trazada por K , y una paralela a BD es trazada por C . Estas líneas se cortan en M . Probar que los puntos D, M, L son colineales.

Fuente: Saint Petersburg Mathematical Olympiad Febrero 1996 – Tomado de la Revista Crux

Solución



Sea O la intersección de AC y BD . Debido a que $ABCD$ es un paralelogramo, tenemos que $AO=OC$. Desde que $AA' \parallel CC'$ obtenemos $A'O:OC' = AO:OC = 1:1$, luego $A'O=OC'$. Así, $AA'CC'$ es un paralelogramo, y luego $AC' \parallel A'C$. En consecuencia $AD \parallel KM$, $C'D \parallel CM$, $AC' \parallel KC$, y $AC' \neq KC$, tenemos AK , $C'C$, y DM son concurrentes en L . De aquí D, M, L son colineales.

Solución: Mohammed Aassila, Strasbourg, Francia y traducción de Aldo Gil C..

Problema 9

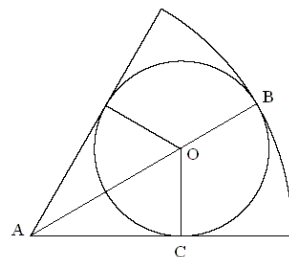
Encontrar el radio del mayor círculo que se puede inscribir en un sector de radio 1 y ángulo de 60° .

Fuente: The W.J. Blundon Contest

Solución

En la figura, $OC = OB = r$. Desde que el ángulo OAC es 30° , $AO = 2 OC = 2r$. Por lo tanto AB es $3r$, y de aquí $r = 1/3$.

Solución: Los autores del problema y traducción con adaptación de Aldo Gil C.



Para rematar este numerito, presentamos uno de Geometría (cuando no), de esta muy buena publicación japonesa Excalibur

Nota.- El apego a la geometría no se si es natural, pero realmente me resulta mas fácil a la hora de traducir, imagínate que este problema este en japonés y ... lo puedo traducir.

Problema 10

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, y sea E la intersección de AD y BC . Sea M la intersección de BD con las líneas que pasan por E paralela AC . Desde M , trazar la tangente al circuncírculo de $ABCD$ tocando el círculo en T . Probar que $MT=ME$

Fuente: Nanking Math Competition -1957-Recopilado de Mathematical Excalibur.

Solución

Desde que ME y AC son paralelas, tenemos que $\angle MEB = \angle ACB = \angle ADB = \angle MDE$. También $\angle BME = \angle EMD$. Luego los triángulos BME y EMD son semejan-

tes. Entonces $MB.MD = ME^2$. Por el teorema de intersección de cuerdas, también: $MT^2 = MB.MD$. En consecuencia: $MT = ME$.

Comentario: Para convertir este problema de tal forma de hallar un resultado podría ser dando como dato, MT y se pida hallar ME . Por otro lado como variante irrelevante podríamos dar uno de los ángulos MEB , ACB , o cualquier otro con un dato conocido, digamos 30 ó 60° . Esto evita la demostración, y lo convierte en "evaluable" si cabe el término para ponerlo a chicos secundarios de 14 ó 15 años.

Solución: Cheung Yun Kuen Chinese Club Women's, traducción y comentarios de Aldo Gil

Y hemos llegado a un múltiplo de 13 (primo), con mucho entusiasmo y las pilas bien puestas.

Seguiremos hasta que el tiempo, o ustedes (lo que suceda primero), lo permitan.

Ayer cruce en la combi con un amigo (lo es ahora y recién lo conocí), cuando me vio balbuceando (en pleno trance de traducción) uno de los problemas en ingles, muy tímido y pidiendo disculpas, me pregunto si era profesor o algo así, y vinimos charlando todo el trayecto, le gusto el asunto y ya esta embarcado en la recepción de nuestros folletos.

Siempre alguien tiene deseos de aprender.... No?

Aldo Gil C.