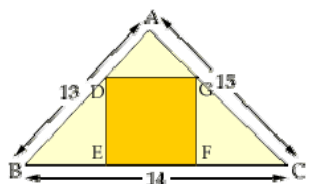


Ahora mis estimados amigos, encontré una página muy buena de donde de tome la libertad de poner un par de problemas, la verdad muy buenos. Ojala y les guste el numerito.

Problema 1



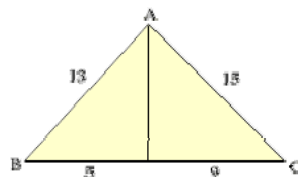
Encontrar la longitud del lado del cuadrado DEFG inscrito en el triángulo ABC con D en AB, EF en BC, y G en AC, dados AB = 13, BC = 14, y CA = 15.

Fuente: La Opera del Algebra Rafael Bombelli, 1572.

Solución

Paso 1: Hallar la altura del triángulo

Forma 1 Es posible evitar cualquier cómputo reconociendo el triángulo 13-14-15 como un viejo amigo: La altura de A divide el triángulo ABC en los triángulos rectángulos 5-12-13 y 9-12-15; y comparten el cateto de longitud 12 que debe ser por consiguiente la altura de triángulo ABC.



(Podríamos usar la ley de cosenos y llegamos al mismo resultado)

$$\cos B = \frac{13^2 + 14^2 - 15^2}{2 \cdot 13 \cdot 14} = \frac{5}{13}; \text{ de donde la altura es } 12.$$

Forma 2 Otra forma de hallar la altura es calculando el área

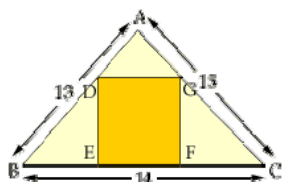
Aplicamos la formula de Heron, calculando el semiperímetro $S = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$. De

aquí: $S_{ABC} = 84$. Desde que la base $BC = 14$, la altura será: $S_{ABC} / 7 = 12$.

Forma 3 Usamos el teorema de Pitágoras (queda como ejercicio)

Paso 2. Determinar los lados del cuadrado usando semejanzas de triángulos ADG ~ triángulo ABC

Los triángulos son semejantes, porque sus lados son paralelos.



Sea x el lado del cuadrado inscrito: $x = DE = EF = FG = DG$.

Forma 1

$$\frac{\text{altura de } \triangle ADG}{\text{base de } \triangle ADG} = \frac{12 - x}{x}, \text{ y } \frac{\text{altura de } \triangle ABC}{\text{base de } \triangle ABC} = \frac{12}{14}. \text{ Desde que}$$

la relaciones son iguales tenemos que: $\frac{12-x}{x} = \frac{12}{14}$. Resolviendo para x encontramos la

longitud del lado $x = \frac{84}{13}$.

Solución: Jeff Eggen (Regina)-Normand Laliberté (Ontario)-Leti Gimeno (Spain)-Juan Mir Pieras (Spain)-Alexander Potapenko (Russia) – traducción y adaptación por Aldo Gil.

Problema 2

Existe solo una solución entera para la expresión:

$$E_{(n)} = \frac{12n^3 - 5n^2 - 251n + 389}{6n^2 - 37n + 45}, \text{ Hallar este valor y demostrar que es único.}$$

Fuente: Math Central Uregina-December 2001

Solución.

Tomamos el problema de Mathematicorum 7:1 (1981), página 31. La solución de Blundon se aprovecha de un truco que merece la pena discutir. Realizando la división tradicional vemos que el denominador entra en el numerador $2n + 9$ veces con un resto que involucra n, específicamente,

$$E_{(n)} = 2n + 9 + \frac{15n^2 - 8n - 16}{6n^2 - 37n + 45}$$

$$E_{(n)} = 2n + 9 + \frac{(3n - 4)(5n + 4)}{(3n - 5)(2n - 9)}$$

El resto sólo puede ser un entero cuando $3n - 5$ divide al numerador. Puesto que $3n - 5$ y $3n - 4$ difieren en 1, ellos son

primos relativos; esto significa ese $E_{(n)}$ sólo puede ser un entero si $3n - 5$ divide a $5n + 4$. Ahora el truco: Si $3n - 5$ dividen $5n + 4$, entonces necesariamente divide también a:

$$3(5n + 4) - 5(3n - 5) = 37$$

Puesto que 37 es primo concluimos que $3n - 5 = \pm 1$ ó $3n - 5 = \pm 37$. Nosotros eliminamos -1, -37, ya que implican $n=4/3$ y $n=-32/3$ (fraccionarios), y la condición busca un entero. Cuando $3n-5 = 1$, $n=2$ y $E_{(2)} = 7,4$ que no es entero. Eso deja $3n - 5 = 37$ donde $n = 14$ y $E_{(14)} = 41$. Así $E_{(n)}$ es un entero si y sólo si $n = 14$, y es la única solución.

No es lisonja pero el problema es extraordinario.....

Solución: W.J. Blundon of the Memorial University of Newfoundland-Traducido por Aldo Gil C.

Problema 3

Sabiendo que este año cumplo un número cuadrado de años, que si a la suma de los dígitos del año que nací le sumo el día y le resto el mes en que nací, también

obtengo este número, pero que si multiplico el mes y el día de mi nacimiento obtengo este número invertido y lo mismo ocurre multiplicando los dígitos del año en que nací.

Se puede saber cuando es mi cumple?

Fuente: Propuesto por Rodolfo Kurchan Marzo 2007-Lista Snark

Solución:

Estos son bien bacilones, así que empiezo:

Asumo que tienes xy años que pueden ser: 25, 36, 49, 64,81 (no me parece que mas ni menos).

También por esta razón naciste en el siglo 20 digamos en el 19ab. Luego, siendo d el día de nacimiento (tenemos que 1<d<31)

También tenemos m el mes de nacimiento: (tenemos que 1<m<12)

Ya podemos hacer algo:

1+9+a+b+d-m=xy

Por las restricciones que yo mismo me puse: a = 2,3,4,5,6,7,8.

Me agrada tratar de sacarle el jugo a cada una de las condiciones.

Las otras condiciones: d.m=yx = 1.9.a.b

Pues joder el viernes te envío un abrazote muy fuerte, y desde ya lindo el problemita y lo ponemos en Problemas resueltos, si no te molesta

Solución: Aldo Gil el 19 de marzo -(Por fin resuelvo algo)

Problema 4

Evaluar x^3+y^3 donde x+y=1 y x^2+y^2=2.

Fuente: Memorial University Undergarte Math Competitions – 2000 – Problema 1

Solución:

Notar que: (x^2+y^2)(x+y) = x^3+y^3+xy(x+y)

= x^3+y^3 + 1/2 ((x+y)^2 - (x^2+y^2) - (x^2+y^2))(x+y). Por lo tanto: x^3+y^3 = 5/2

Solución: Catherine Shevlin, England – Traducción de Aldo Gil C.

Problema 5

El cuadrado de un número es 12 veces más que el número. El cubo del número es 9 veces el número. ¿Cual es el número?

Fuente: UKMT Mathematical Challenges.

Solución:

Sea x el número. Entonces x^3 = 9x, luego x= 0 ó x^2 = 9, y esto nos da x = 3 ó x = -3.

De estos valores solo, -3 es una solución de la ecuación x^2 = x + 12.

Solución: NRICH books and CDs- Traducción de Aldo Gil C.

Problema 6

¿Cual es mayor: (sqrt[3]{2} - 1)^{1/3}, ó sqrt[3]{1/9} - sqrt[3]{2/9} + sqrt[3]{4/9}?

Fuente: Six Klamkin Quickles-Aparecida en Crux-Olympiad Corner 172-Problema 1

Solución:

Por la identidad de Ramanujan, ellos son iguales.

Haciendo x = sqrt[3]{1/3} e y = sqrt[3]{2/3}, es suficiente demostrar que: (x+y)^3 (sqrt[3]{2} - 1) = 3, lo cual se continua por expansión, y se demuestra.

A ver si averiguamos algo del amigo Ramanujan, (no se quien será, honestamente)

Solución: Murray Klamkin de Cruz- (Canadá)-traducción de Aldo Gil C.

Problema 7

Las longitudes de los lados de un cuadrilátero son enteros positivos. La longitud de cada lado divide a la suma de las otras tres longitudes. Probar que dos de los lados tiene la misma longitud.

Fuente: Mathematical Excalibur Japón-Volumen 6- 2001- Problema 117.

Solución

Suponer que los lados sean a, b, c, d con a < b

$c < d$. En consecuencia $d < a + b + c < 3d$ y d divide a $a + b + c$, tenemos que $a + b + c = 2d$. Ahora cada uno de los lados a, b, c dividen a $a + b + c + d = 3d$. Sea $x = 3d/a, y = 3d/b$ y $z = 3d/c$.

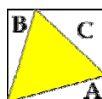
Entonces $a < b < c < d$ implica que $x > y > z > 3$.

Así $z \geq 4, y \geq 5, x \geq 6$. Entonces $2d = a + b + c \leq \frac{3d}{6} + \frac{3d}{5} + \frac{3d}{4} < 2d$, lo cual es una contradicción. De aquí, dos de los lados son iguales.

Solución. CHAO Khek Lun (St. Paul's College, Form 6) and LEUNG Wai Ying (Queen Elizabeth School, Form 6)- Traducción de Aldo Gil .

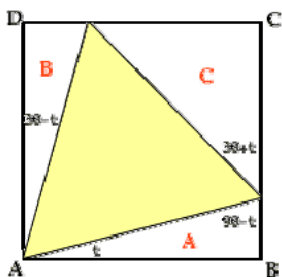
Problema 8

Un triángulo equilátero está inscrito en un rectángulo y tiene un vértice común con el, si A, B, C son las áreas de los triángulos rectángulos como se muestra, probar que: $A + B = C$.



Fuente: Math Central Uregina-January 2001

Solución



Sea t el ángulo de la región A en el vértice A , los ángulos de las regiones B y C son $30^\circ \pm t$ tal como se muestra en la figura. Llamando s a la longitud del triángulo equilátero, las áreas son (usando la identidad: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$)

$$4A = 2s^2 \sin t \cos t = s^2 \sin 2t$$

$$4B = 2s^2 \sin(30^\circ - t) \cos(30^\circ - t) = s^2 \sin(60^\circ - 2t)$$

$$4C = 2s^2 \sin(30^\circ + t) \cos(30^\circ + t) = s^2 \sin(60^\circ + 2t)$$

Debemos demostrar que: $\sin 2t + \sin(60^\circ - 2t) = \sin(60^\circ + 2t)$

Desde que: $\sin(60^\circ \pm 2t) = \sin 60^\circ \cos 2t \pm \sin 2t \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2t \pm \frac{1}{2} \sin 2t$,

El lado izquierdo es: $\frac{1}{2} \sin 2t + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2t$, la cual es igual al lado derecho como se pide.

Solución: Resuelto por Hua Ma (in Computer Science at the University of Regina), Juan Mir Perras (from Spain), y Midhun Chandran, traducción y adaptación por Aldo Gil.

Problema 9

Determine todas las soluciones enteras de las ecuaciones simultáneas diofánticas siguientes: $x^2 + y^2 + z^2 = 2w^2$ y $x^4 + y^4 + z^4 = 2w^4$

Fuente: Six Klamkin Quickles-Aparecida en Crux-Olympiad Corner 172-Problema 4

Solución:

De nuevo nos encontramos con otro compadre como Desboves, a ver si hallo material, aunque sea en inglés y lo ponemos en el próximo número.

Eliminando w tenemos:

$$2y^2z^2 + 2z^2x^2 + 2x^2y^2 - x^4 - y^4 - z^4 = 0 \quad \text{ó} \quad (x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) = 0.$$

En general podemos tomar $z = x + y$. Nota que si (x, y, z, w) es una solución, también lo es $(\pm x, \pm y, \pm z, \pm w)$ y las permutaciones de x, y, z . Sustituyendo tenemos: $x^2 + xy + y^2 = w^2$.

En consecuencia $(x, y, w) = (1, -1, 1)$ es una solución, la solución general es obtenida por el método de Desboves, es decir, ponemos: $x = r + p, y = -r + q$ y $w = r$. Esto da:

$$r = \frac{p^2 + pq + q^2}{q - p}.$$

Racionalizando las soluciones tenemos, desde que la ecuación es homogénea:

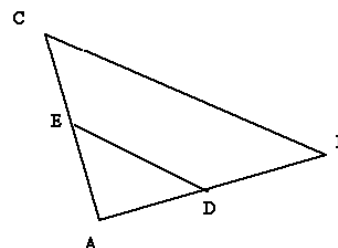
$$x = p^2 + pq + q^2 + p(q-p) = q^2 + 2pq,$$

$$-y = p^2 + pq + q^2 - q(q-p) = p^2 + 2pq,$$

$$w = p^2 + pq + q^2,$$

$$z = q^2 - p^2.$$

Solución: Murray Klamkin de Cruz- (Canadá)-traducción de Aldo Gil C.



Problema 10

En el triángulo ABC queremos trazar el segmento DE paralelo al lado BC , de modo que el área del trapecio $BCDE$ sea igual al del triángulo ADE . Si el lado AB mide 10 cm, hallar AD

Fuente: Lista de discusión de la OBM – Rejane 30 Octubre 2006

Solución:

Tome $AD=x$, luego $BD=10-x$, ahora aplicamos semejanza para los triángulos ABC y

ADE , y haciendo relación de áreas tenemos: $\left(\frac{AB}{AD}\right)^2 = \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}$, como el área de ABC es

dos veces a de ADE , tenemos: $\left(\frac{10}{x}\right)^2 = \frac{2S_{ADE}}{S_{ADE}}$, resolviendo tenemos: $x=AD= 5\sqrt{2}$

Solución. Profesor Alex Pereira do colegio Motivo y traducción de Aldo Gil.

Aquí terminamos con el numero 38, puffff... sí que se avanza, claro ya se va agotando la biblioteca, lo que pasa es que tengo una enorme cantidad por traducir, pero el tiempo no me da, además a veces a la lectura rápida antes de traducir en máquina, la solución parece interesante y me entusiasma, luego me doy cuenta a medio camino que es medio soso, y pues pierdo tiempo, en fin hay una vieja canción que dice:

Te metiste a soldado ahora tienes que aprender (creo que se lo escuche a doña Celia Cruz).

Ya me metí en este asunto, tengo muchos amigos que me piden problemas y es una obligación moral continuar el trabajo, con mucho gusto por supuesto.

Abrazos

Aldo