Aquí arrancamos (en la primera parte) con la lista de la OBM (Olimpiada Brasileira de Matemática), de hecho una de las mas activas que he visto, y con una variedad de problemas y dudas, y links realmente bárbaro, claro que anda en portugués, pero tanto mirar a Ronaldinho, pues ya se me pego el asunto, y pues realmente es tan divertida la pagina, que me entretengo mucho traduciendo sus problemas.

Por lo tanto, dedicado a los amigos de la OBM, va este número donde me he birlado estos problemitas, y ya luego otras cosillas del resto del mundo para no perder "globalización" (¿Qué huachafo no?).

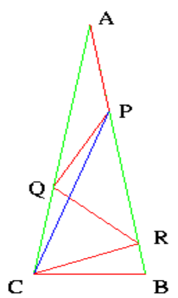
Vale hombre, joder que buena página.

Problema 1

En un triángulo *ABC*, se tienen los ángulos $\angle ABC = \angle ACB = 80º$. Si P es un punto sobre *AB* tal que *AP* = *BC*, hallar la medida del ángulo $\angle BPC$

Fuente: Propuesto por Marcelo Costa OBM-Brasil 25 Enero 2007-03-05

Solución:



Trace un ángulo de 20º con vértice *A* (en verde) y un punto *P* cualquiera en uno de los lados del ángulo. Use un compás para obtener los segmentos *PQ*, *QR*, *RC* y CB (en rojo), todos de la misma longitud, como se muestra en la figura

Como *APQ* es isósceles, $\angle AQP = \angle QAP = 20º$ donde $\angle RPQ = 40º$.
Como *PQR* es isósceles, $\angle PRQ = \angle RPQ = 40º$ donde $\angle CQR = 60º$.
Como *QRC* es isósceles, $\angle QCR = \angle CQR = 60º$ donde $\angle BRC = 80º$.
Como *RCB* es isósceles, $\angle RBC = \angle BRC = 80º$ donde tenemos la figura del enunciado.

El triángulo *CQP* también es isósceles. Como $\angle CQP = 160º$, tenemos $\angle QCP = \angle CPQ = 10º$ donde $\angle BPC = 30º$.

Note que la construcción es especial para estos valores de los ángulos. Si cambias en el enunciado 80º por otro número el problema es imposible de resolver con geometría elemental.

Solución: Resuelto por Nicolau C. Saldanha, traducción y adaptación Aldo Gil C.

Problema 2

La base de un triángulo *T* tiene 10 m y su altura 12 m. A que distancia del vértice debemos cortar este triángulo por una paralela a su base, de modo que a área del

trapecio obtenido sea media proporcional entre el área de *T* y la del triángulo resultante del corte?

Fuente: Tomado de lista de discusión OBM – Brasil- UFPB-78

Solución:

Sea:

Área del trapecio: A_{tp}

Área del triángulo mayor: A_T

Área del triángulo menor: A_t

$A_T = 10.12 / 2 = 60\ m^2$

Queremos que:

$\dfrac{A_T}{A_{tp}} = \dfrac{A_{tp}}{A_t}$ (Media proporcional) ó $A_{tp}^2 = 60 \,.\, A_t$ ...... (1)

Como "*T*" e "*t*" son semejantes, tenemos que:

Base de corte: *b*

Distancia del corte al vértice: *h*

$$\frac{b}{h} = \frac{10}{12} \Rightarrow b = \frac{5h}{6} \; .... \quad (2)$$

De (1):

$$\left(\frac{(10+b)(12-h)}{2}\right)^2 = 60.\frac{bh}{2} ....(3)$$

Combinando (2) y (3) obtenemos la respuesta.

Solución: Filipe de Carvalho Hasché – Febrero 2007- con traducción de Aldo Gil C.

Problema 3

En una sustracción, la suma del sustraendo con el resto vale 123. Sabiendo que el sustraendo excede al resto en 5 unidades, hallar la suma del minuendo con el resto.

***Fuente:** Propuesto en OBM-Brasil- 05 marzo 2007*

Solución:

Vean si los cálculos están correctos ó si hay un modo más rápido y fácil de solucionar la cuestión.

$S + R = 123$ y $R + 5 = S$ (condiciones del problema)

$\Rightarrow R + 5 + R = 123 \Rightarrow 2R + 5 = 123 \Rightarrow$

$R = 59$

De aquí: $S = R + 5 = 59 + 5 = 64$

Como: $M - S = R \Rightarrow M - 64 = 59$

$M = 59 + 64$

$M = 123$ entonces $M+R = 123 + 59 = 182.$

Solución: Resuelto por Aristeu Rodrigues traducción de Aldo Gil

---

Problema 4

Sea *ABC* un triángulo, *P* el pie de la bisectriz interna relativa al lado *AC* e *I* su incentro.

Si $AP + AB = CB$, probar que API *es* un triángulo isósceles.

Fuente: Olimpiada Brasileira de Matematica 2006-Nivel 3-Problema 1

Solución:

Considere un punto P' en la semirrecta BA tal que $AP'=AP$. Por el enunciado, tenemos que $BP' = BC$, entonces, el triángulo BCP' es isósceles. Sea J el pie de la bisectriz de B en el lado $P'C$.

Como $\angle AIP$ es ángulo externo del triángulo ABI, tenemos:

$$\angle AIP = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}$$

Como BJ *es* mediatriz de $P'C$, tenemos que: $\angle BCP = \angle AP'P = \dfrac{\angle A}{2}$ (Puesto que el triángulo APP' es isósceles).

De ahí, como $\angle API$ es ángulo externo en el triángulo BCP, tenemos:

$$\angle AIP = \frac{\angle B}{2} + \angle BCP = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2},$$

Entonces, $API = \angle AIP$ y el triángulo API es isósceles.

Solución: Resuelto por Rodrigo Villard Milet y traducción de Aldo Gil.

Problema 5

Si $a \varepsilon R$ y la ecuación $3y^2 - y + a = 0$ tiene raíces iguales, hallar la solución de la ecuación: $3^{2x+1} - 3^x + a = 0$.

Fuente: ***Instituto Tecnológico da aeronáutica - vestibular 2001-1ª-Q. 01 A 13***

Solución:

Como la ecuación $3y^2 - y + a = 0$, tiene raíces iguales, entonces $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 1^2 - 4.3.a = 0 \Rightarrow a = 1/12$. Asimismo, tenemos: $3^{2x+1} - 3^x + a = 0 \Rightarrow 3^{2x+1} - 3^x + (1/12) = 0 \Rightarrow 3.(3^x)^2 - (3^x) + (1/12) = 0$. Haciendo $(3^x) = y$, resulta: $3y^2 - y + 1/12 = 0$. Calculando las raíces, tenemos: $= 1 - 4.3.(1/12) = 0$ e $y = -(-1)/2.3 = 1/6$. Retornando a $y = 3^x = 1/6$, por definición de logaritmos $x = \log_3 (1/6) = \log_3 1 - \log 3\ 6 = 0 - \log_3 6 = -\log_3 6$.

Solución: Resuelto por Rodrigo Villard Milet y traducción de Aldo Gil

---

Problema 6

Ernesto, Ernani y Everaldo son tres atletas que resuelven organizar una carera de ciclismo entre ellos. Fijan un total de puntos para el primer, segundo y tercer lugar en

cada prueba. La puntuación para el primer lugar es mayor que para el segundo y esta es mayor que la puntuación para el tercero. Las puntuaciones son números enteros positivos. El desafío consiste de n pruebas ($n>1$), al final de las mismas se observa que Ernesto hace 20 puntos, Ernani 9 puntos y Everaldo 10 puntos. Hallar el número n de pruebas disputadas

Fuente: Tomado de lista de discusión OBM – Brasil- ESAF

Solución:

Veamos lo siguiente:

Vamos a suponer que el primer lugar gane a puntos, el segundo b puntos y el tercero "c" puntos. Luego, cada prueba hace un total de $a + b + c$ puntos para sus tres participantes.

Como el total de puntos recibidos por los participantes fue de 20+9+10 = 39 y son n pruebas, tenemos entonces que $n.(a + b + c) = 39$, que fue el total de puntos distribuidos en todas las competiciones. Como todas las variables son enteras y $a>b>c$, tenemos:

$n.(a + b + c) = 3x13 \Rightarrow n = 3$ y a + b + c = 13.

Solución: Paulo Cesar – Febrero 2007 con traducción de Aldo Gil C.

Problema 7

Resolver la inecuación, en el conjunto de los números reales: $x^2 - 3\sqrt{x^2+3} \le 1$.

Fuente: Komal Problems in Mathematics, April 2006-Problema C.852

Solución

Hacemos un artificio, y tenemos:

$$x^2 + 3 - 3\sqrt{x^2+3} - 4 \le 0$$

$$\left(\sqrt{x^2+3} - 4\right)\left(\sqrt{x^2+3} + 1\right) \le 0$$

Para que x pertenezca a los reales tenemos: $\sqrt{x^2+3} \le 4$, resulta $x^2 \le 13$.

De aquí obtenemos: $x_\varepsilon \left[-\sqrt{13}, \sqrt{13}\right]$.

Solución: Resuelto por los proponentes y traducción del húngaro (a golpes e intuición) por Aldo Gil.

Problema 8

Mi padre tenía 6 tramos de cadena de 4 eslabones cada uno. Mi padre me dice: que hay que convertir estos 6 tramos en una sola cadena, para esto me cobran 27 pesos por abrir cada eslabón y por cerrarlos me cobran 17.25 peso; ¿Cuál es el menor costo de unir los tramos y conformar una sola cadena?

Fuente: Propuesto por Rosa Isela Santillán Ravelo March 02, 2007 5- Lista Matracas

Solución

Se toman 5 de los tramos, y el sexto se utiliza para unir los cinco anteriores.

Para unir 5 tramos, precisamos de 4 eslabones unión (los cuatro eslabones del sexto tramo).

Se abre un eslabón (del sexto tramo), se separa de este tramo y se utiliza para enlazar el primer y segundo tramo, tras lo cual se cierra.

Se abre el segundo eslabón del sexto tramo, se separa y se utiliza para enlazar los dos primeros tramos (ya unidos) con el tercero, tras lo cuál se cierra.

Se repite el mismo proceso con el tercer y cuarto eslabón de ese sexto tramo.

En total, tenemos que abrir y cerrar 4 eslabones como mínimo, con un coste total de: 4.(27+17.25)=177 pesos.

Solución: Diana de lista Matracas 02-03-07

Problema 9

Demostrar que el interior de de un cuadrilátero convexo de área A y perímetro P contiene un circulo de radio $\frac{A}{P}$.

Fuente: Mathematical Excalibur Japon-Volumen 6- 2001- Problema 116.

Solución

Sea $BCDE$ un cuadrilátero de área A y perímetro P. Una de las diagonales, digamos BD es interior al cuadrilátero. Entonces Δ BCD ó Δ BED tiene un área mayor o igual que $\frac{A}{2}$. Suponer que esta es ΔBCD . Entonces $BCDE$ contiene el incírculo de Δ BCD , con radio: $\frac{2[BCD]}{BC+CD+DB} > \frac{2[BCD]}{BC+CD+DE+EB} \geq \frac{A}{P}$. (Los símbolos entre corchetes, denotan el área). De aquí, el cuadrilátero contiene un círculo de radio $\frac{A}{P}$

Comentario: La solución no requiere asumir que el cuadrilátero sea convexo.

Solución: CHUNG Tat Chi (Queen Elizabeth School, Form 4) and LEUNGWai Ying (Queen Elizabeth School, Form 6), traducción obviamente de Aldo Gil.

Para rematar este numerito, presentamos uno de trigonometría, recogido de la revista Mathematikal Lapok (publicación húngara), y alucinen que es dl año 1893!!!!!!!!!, que buena onda, me convierto en buscalibros antiguos, y encima traducido del húngaro. A mi me bacilo el problema mas que por el mismo, por lo antiguazo

(Al que quiera la página Web, me la pide a mi privado, solo que para bajar estos archivos me tire cerca de 10 horas, y esta en hojas escaneadas de muy mala calidad, y en húngaro)

Problema 10

En un triángulo de lados a,b,c demostrar la siguiente identidad:

$$\frac{sen(a-b)}{sena.senb}+\frac{sen(b-c)}{senb.senc}+\frac{sen(c-a)}{senc.sena}=0$$

Fuente: Revista Mathematikal Lapok – por Arany Daniel-1894.

Solución

Sabemos que:

sen (a-b) = sen a.cos b - sen b.cos a,

sen (b-c) = sen b.cos c - sen c.cos b,

sen (c-a) = sen c.cos a - sen a.cos c.

Reemplazando:

$$\frac{sen(a\quad b)}{sena.senb}$$

$-$ $= cot\ c - cot\ b.$

$\frac{sen(c-a)}{senc.sena} = cot\ a - cot\ c.$

En la ecuación original:

$$\frac{sen(a-b)}{sena.senb}\quad\frac{sen(b-c)}{senb.senc}\quad\frac{sen(c-a)}{senc.sena}\quad 0$$