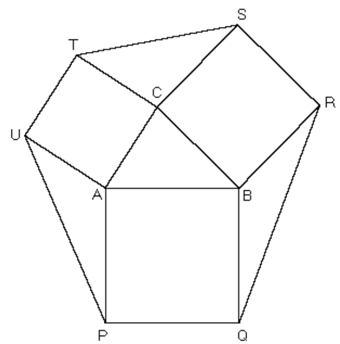
Vamos a ver como nos va en Febrero, de arranque con una par de problemas, (cuando no… de Geometría), pero que le hacemos si es lo que mas me gusta, y tengo una pasión terrible por los dibujos.
Les cuento como funciona la edición de problemas, Aldito agarra la combi muy temprano para el laburo, con su libro bajo el sobaco, los primeros 15 minutos de viaje son para una enterada de noticias del diario, y los otros 30, lapicero en mano seleccionado y traduciendo mentalmente los problemas, si me producen escozor al traducirlos pues van….., si no hay reacción pues pasan de largo, al retorno del laburo, pues acabo de leer el diario, llegando a casa, previas pantuflas y café, a mirar el correo y a pasar al limpio el/los problemas traducidos. Medio egoistona la cosa, porque lo que me gusta a mi, puede no necesariamente gustarle o servirle al resto, pero tengo la solución, si alguno tiene algún tema, pues prepara el problemita, me lo pasa hasta en ruso si quiere, y le doy tramite (ruso es una exageración, vaya).Ya saben como es la cosa, y se pueden imaginar a este tío en la combi, a las 7 am, leyendo problemas de matemática!!!, en ingles, francés ¡!!, los pasajeros se me corren.

Problema 1



En la figura, *AB=7, BC=6,* y *CA=5*. Los cuadriláteros *ABQP, BCSR*, y *CAUT* son cuadrados. Hallar el área del hexágono *PQRSTU.*

Fuente: High School Problem – Nº 15

Solución:

Desde que *CT* = *CA* y *CS* = *CB* y el ángulo *SCT* con *ACB* son suplementarios, el triángulo *CST* tiene la misma área que el triángulo *ABC*. [Aquí utilizamos la propiedad que si un triángulo tiene dos lados *a* y *b* con un ángulo central *x*, entonces el área será: $\frac{ab.senx}{2}$] En forma similar los triángulos *BQR* y *APU* tienen la misma área que el triángulo *ABC*. Usando la formula de Heron, el área del triángulo *ABC* es $K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} = 6\sqrt{6}$.

De aquí, el área del hexágono es: $5^2 + 6^2 + 7^2 + 4K = 110 + 24.\sqrt{6}$

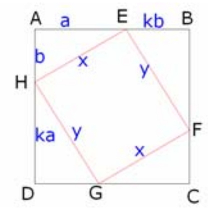
Solución: Los editores, adaptación y traducción por Aldo Gil C.

Problema 2

Recontra OFF TOPIC: La verdad, yo tenia otro concepto de Ali Baba, cuando leí este problema, y lo menos que se me ocurrió es que se dedicara a comerciante, a veces las fábulas nos ponen medio lerdos, yo alucine al tío, robando oro y plata, ó en el mejor de los casos traficando con alfombras, pero ¿vendiendo, alfombras?, y de remate matemático el tío, pues quería calcular el tamaño de la alfombra y se hizo todas estas operaciones, joder…., ya no se puede.

Ali Baba un comerciante de alfombras, tiene una pieza rectangular de alfombra cuyas dimensiones son desconocidas. Desafortunadamente su regla de medición se ha roto, y no tiene otro instrumento para medirla. Sin embargo, encuentra que si la pone en el piso de cada uno de dos cuartos, cada esquina toca una de las paredes. Si los cuartos tienen dimensiones de 38 por 55 y 50 por 55 pies. ¿Cuáles son las dimensiones de la alfombra?

Fuente: Problemas proposed for the 30th- IMO – Austria Problema 3



Solución:

Sabemos que *AD=55* y *AB*=50 ó 38

Es fácil ver que: $\Delta AEH \equiv \Delta CGF$, es similar a: $\Delta BFE \equiv \Delta DHG$.

Sea *y/x* = *k*, entonces *k* es el factor de semejanza entre los dos tipos de triángulos.

Sea *AE=a* y *AH=b*, entonces por semejanza *BE=kb* y *DH* = *ka*.

Esto es que: *a+kb=60* y *ka* + *b* = 55.

Entonces: $a = \frac{55k-50}{k^2-1}$ y $b = \frac{50k-55}{k^2-1}$. De aquí: $x^2 = \left(\frac{55k-50}{k^2-1}\right)^2 + \left(\frac{50k-55}{k^2-1}\right)^2$, y simplificando obtenemos: $x^2(k^2-1)^2 = 5525k^2 - 1100k + 5525$ En forma similar para la otra habitación (AB=38), tenemos: $x^2(k^2-1)^2 = 4469k^2 - 8360k + 4489$.

Combinando ambas ecuaciones, tenemos:

$5525k^2 - 1100k + 5525 = 4469k^2 - 8360k + 4489$, resolviendo esta ecuación, tenemos: *k* = 2 y *k* = ½.

Sin perdida de generalidad y=2x y a+2b=50, 2ª+b=55, y de aquí despejando, a=20 y b=15. Esto es: $x^2 = a^2 + b^2 = 20^2 + 15^2$. De aquí *x* = 25 y *y* = 50.

Por lo tanto la alfombra tendrá 50 por 25 pies.

Solución: Los miembros del jurado, adaptación y traducción por Aldo Gil C.

Problema 3

A la pucha, hace mas de cien años de este problemilla, bastante no?.

Si a, b, c son números reales tales que $a^2+b^2+c^2=1$, probar que:

$$-\frac{1}{2} \le ab+bc+ca \le 1.$$

Fuente: 17º Olimpiada de Hungría 1905-Problema 1

Solución

Primera parte:

$$(a+b+c)^2 \ge 0$$

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac \ge 0$$

$$1+2(ab+bc+ca) \ge 0$$

$$ab+bc+ca \ge -\frac{1}{2}$$

Segunda parte:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$$

$$2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca) \ge 0$$

$$1-(ab+bc+ca) \ge 0$$

$$ab+bc+ca \le 1$$

Solución: Aparecido en revista Eureka Nº 4 (Problemas antiguos) - con traducción de Aldo Gil.

Problema 4

Tenemos un cuadrado de *ABCD*, que podemos suponer de lado 1 sin pérdida de generalidad. Con centro en el punto medio del lado *AD*, llamémosle *G*, se traza una circunferencia de diámetro *AD*. Desde el punto *C* se traza la tangente a esta circunferencia, distinta de *CD*. Llamamos *E* al punto de tangencia. Sea *F* el punto de intersección de *BD* con *CE*. Se pide el cociente entre las áreas S_1 del triángulo *DEF* y S_2 del triángulo *BCF*.

Fuente: Apareció en una lista de discusión, no recuerdo quien lo propuso

Solución

El ángulo *AED* es recto, por estar inscrito en una semicircunferencia, y el *GEC* también, por estar formado por el radio y la tangente a la circunferencia correspondiente al punto E. En consecuencia, los ángulos *AEG* y *DEC* son iguales, pues sus lados son perpendiculares. Por tanto, los triángulos isósceles *AEG* y *DEC* son proporcionales, con razón $\frac{1}{2}$, pues tienen dos ángulos iguales.

Por tanto, $AE = \frac{1}{2}.DE$ y por Pitágoras,

$$1^2 = DE^2 + \frac{1}{4}DE^2 \Rightarrow DE = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Si llamamos *H* a la proyección de *E* sobre el lado *DC*, por semejanza de $\frac{DE}{DA} = \frac{EH}{DE} \Rightarrow EH = DE^2 = \frac{4}{5}$.

Por tanto, el área del triángulo *DEC* es $\frac{2}{5}$.

Como la del triángulo *BCD* es $\frac{1}{2}$, ya sabemos que la diferencia S_2-S_1 = $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$, pues ambos triángulos comparten el ángulo *CDF*.

Por otra parte, como los triángulos *ADE* y *DEH* son proporcionales, tenemos que $DH = \frac{2}{5}$ y $CH = \frac{3}{5}$. Por tanto, *tan (FCD)* = $\frac{4}{3}$. En el triángulo *CDF* tenemos entonces que:

tan (CFD) = tg(π - (FCD + CDF)) = tg((π - CDF) - FCD))

$$= \tan(135^o - FCD) = \frac{\tan 135^o - \tan FCD}{1+\tan 135^o.\tan FCD}$$

$$= \frac{-1-\frac{4}{3}}{1+(-1).\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{7/3}{1/3} = 7$$

Entonces,

$$sen\,(CFD) = \frac{\tan(CFD)}{\sqrt{1+\tan^2 CFD}} = \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

Aplicando el Teorema del seno al triángulo *CFD*,

$$\frac{FC}{sen\,(FDC)} = \frac{CD}{sen\,(CFD)} \Rightarrow \frac{2FC}{\sqrt{2}} = \frac{10}{7.\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow FC = \frac{5}{7}$$

$$\frac{FD}{sen\,(FCD)} = \frac{CD}{sen\,(CFD)} \Rightarrow \frac{FD}{sen\,(FCD)} = \frac{10}{7.\sqrt{2}}$$

Pero *sen (FCD)* = *sen(ECH)* = $\frac{4}{5} \Rightarrow$ FD = $\left(\frac{4}{5}\right).\frac{10}{7.\sqrt{2}} = \frac{8}{7.\sqrt{2}}$

Como

$$S_1 = \frac{1}{2}EF.FD.sen\,(\angle EFD)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}CF.FB.sen\,(\angle CFB)$$

y los ángulos *EFD* y *CFB* son opuestos por el vértice,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{EF.FD}{CF.FB} = \frac{(1-FC)FD}{CF\left(\sqrt{2}-FD\right)},$$

reemplazando y efectuando: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{8}{15}$

Aunque no se pide, como sabemos que S_2 - S_1 = $\frac{1}{10}$, podemos ya fácilmente determinar $S_1 = \frac{4}{35}$, $S_2 = \frac{3}{14}$

(Todo ello suponiendo el área del cuadrado igual a 1)

No me extrañaría nada que pudiese hacerse de forma más simple, especialmente empleando menos trigonometría. Lo pensaré.

Solución: Como siempre brillante Ignacio Larrosa Cañestro, con una didáctica tremenda. Gracias Ignacio.

<u>Problema 5</u>

Este problemita que encontré en una lista de problemas para la IMO, me resulto sugerente, y lo lance a la red, y pues tuve una clara respuesta de Emilio.

Una caja contiene "p" bolas blancas y "q" bolas negras. Junto a la caja hay una pila de bolas negras y blancas. Dos bolas son tomadas de la caja, y si son del mismo color, una bola negra de la pila es colocada en la caja, si son de diferente color, una bola blanca de la pila es colocada en la caja. Este procedimiento es repetido hasta que el ultimo par de bolas son removidos de la caja y una última bola es colocada en ella. ¿Cual es la probabilidad que esta bola sea blanca?

Fuente: Apareció en una lista de problemas IMO 198.... no me acuerdo

---

<u>Solución</u>

Hola Aldo, Snark

Sorprendente problema...

En un principio, parecía un farragoso problema de cálculo de probabilidades (se complica porque en cada extracción, las probabilidades van cambiando). Pero analizando el proceso se observa que:

1º) En cada extracción se reduce en una bola la suma total de blancas y negras (o sea, haremos $p+q-1$ extracciones).

2º) Si extraemos dos blancas, aumenta en una el *nº* de negras (y lógicamente disminuye en 2 el *nº* de blancas)

3º) En cualquier otro caso (da igual extraer dos negras ó una de cada una) disminuye en una el *nº* de negras.

Para que la última que coloquemos sea blanca, el último par debe ser una de cada color. Pero notemos que el *nº* de blancas siempre disminuye de dos en dos, luego si inicialmente había un *nº* par de bolas blancas, es imposible que la última pareja sea una blanca y una negra.

Además, siempre que el *nº* de blancas sea un valor impar acabaremos teniendo al final una blanca y una negra.

En resumen, la probabilidad de que la última colocada sea blanca es 1 si p es impar y 0 si p es par.

Si la cantidad de bolas se cogen al azar, la mitad de las veces acabaremos con una blanca y la otra mitad con una negra (pero notad que no depende de la cantidad de bolas de cada color que pongamos, de ahí lo sorprendente del problema).

Solución: Emilio Martín –Alicante- y colocada por Aldo Gil.

<u>Problema 6</u>

Factorizar $x^8 + 4x^2 + 4$ en dos polinomios con coeficientes enteros.

Fuente: Mathematical Excalibur, Vol. 7, No. 2, May 02- Jun 02-Problema 147

<u>Solución</u>

$x^8 + 4x^2 + 4$

$= (x^8 + 4x^6 + 8x^4 + 8x^2 + 4) - (4x^6+8x^4+4x^2)$

$= (x^4+2x^2+2)^2-(2x^3+2x)^2$

$= (x^4+2x^3+2x^2+2x+2)\ (x^4-2x^3+2x^2+2)$

Solución. CHENG Ka Wai (STFA Leung Kau Kui College, Form 4)-Japón

---

<u>Problema 7</u>

Considere m y n los números obtenidos en los lanzamientos sucesivos de un dado, no-viciado, con los lados numerados del 1 al 6. Calcule, en porcentaje, la probabilidad de que la ecuación $x^2 + mx + n = 0$ admita por lo menos una raíz real.

Fuente: arkon – Lista de discusión OBM-Enero 2007- PAS-UnB

<u>Solución:</u>

Para un polinomio, tenemos que ó posee una raíz real ó no la posee; para que la raíz sea real tenemos: $m^2 - 4n \geq 0 \Rightarrow m^2 \geq 4n$

Ahora es más fácil contar:

para $m = 1$, no existe n

para $m = 2$, $n = 1$

para $m = 3$, $n = 1, 2$

para $m = 4$, $n = 1, 2, 3, 4$

para $m = 5$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

para $m = 6$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

ahora vamos a contar todos los casos posibles: 36, luego, la probabilidad es: 19/36 = 52,7%

Solución: Resuelto por Marcelo Salhab Brogliato, traducción y adaptación de AldoGil

Problema 8

Otro de paridades.

Escribimos los números naturales del 1 al 11.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Antes de cada uno de ellos, coloque signos "+" ó "–" de forma que la suma de todos sea cero.

Solución: Revista Eureka Nº 1 con traducción de Aldo Gil.

Solución

La suma de los números naturales del 1 al 11 es 66. ¿Como podemos separarlos en dos grupos cuya suma sea 33? Comenzando por los mayores observe que 11 + 10 + 9 = 30. Luego, 11 + 10 + 9 + 3 = 33. El problema tiene como una solución posible:

+1 + 2 – 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 – 9 – 10 – 11 = 0

Queda para el lector demostrar que siempre que la suma de los naturales de 1 hasta n es par entonces podemos separarlos en dos grupos de igual suma.

Solución: Artículo aparecido en revista Eureka Nº 1 con traducción de Aldo Gil.

Problema 9

Si los lados y las alturas de un triángulo están en progresión aritmética, probar que es equilátero

Fuente: Lista de discusión de la OBM – João 27 Octubre 2006-11-04

Solución

Si los lados a, b y c están en PA, hagamos $a = 2x-r$, $b = 2x$ y $c = 2x+r$. Si S es el área y las alturas también están en PA, $\frac{2S}{a}$; $\frac{2S}{b}$ y $\frac{2S}{c}$ están en PA, ó sea: $\frac{S}{b}$ es media aritmética de $\frac{S}{a}$ y $\frac{S}{c}$ ó sea: $\frac{1}{2}x = \frac{\left[\frac{1}{2x-r}+\frac{1}{2x+r}\right]}{2}$ lo que acarrea $r = 0$.

Solución: Resuelto por Carlos Eddy Esaguy Nehab de la lista OBM y traducción de Aldo Gil.

Problema 10

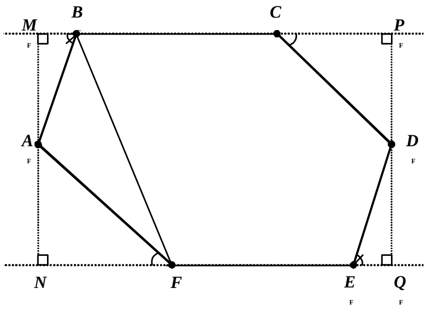
Rematamos con una problema de la IMO 1996, no soy muy afecto a poner sobre IMO, porque creo que ya lo deben tener, pero la solución es encantadora y muy académica, y va como

número 10, para que la analicen con paciencia, frente a una taza humeante de café ....

Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo tal que AB es paralelo a DE, BC es paralelo a EF y CD es paralelo a FA. Sean R_A, R_C, R_E los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos FAB, BCD, DEF respectivamente, y sea p el perímetro del hexágono. Probar que: $R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}$.

Fuente: Olimpiada Matemática Internacional 1996

Solución



Algo en este problema nos insinúa a usar la trigonometría, ¿la percibes?. De hecho podemos relacionar radio de circunferencia circunscrita con lado (que tiene que ver con el perímetro), nos tienta a la conocida ley de senos, que afirma: dado un triángulo ABC, tenemos que $\frac{BC}{senA} = \frac{AC}{senB} = \frac{AB}{senC} = 2R$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo dado (como ejercicio, probarla).

Por lo tanto, no trabajamos con los radios de los triángulos citados, pero si con algunas diagonales del hexágono. Esto porque, por la ley de senos, obtenemos que $BF = 2R_A.sen FAB$, $BD = 2R_C.sen BCD$, $FD = 2R_E.sen DEF$ (o sea, encontramos una relación entre los radios citados en el problema y algunas diagonales del hexágono, lo que facilitará nuestro trabajo). La próxima parte de la resolución del problema es la que exige una mayor dosis de creatividad por parte del estudiante. Veamos. Prolonguemos los lados paralelos BC y EF do hexágono (ver *figura*). Por A y D tracemos perpendiculares a los lados prolongados, obteniendo el rectángulo de vértices M, N, P y Q, como se muestra. Como MN y PQ son las menores distancias las retas paralelas BC y EF (los segmentos son perpendiculares a las mismas), tenemos que $BF \geq MN$ y $BF \geq PQ \Rightarrow 2BF \geq MN + PQ \Rightarrow 2BF \geq AM + NA + DP + DQ \Rightarrow 2BF \geq AB.senB + AF.senF + CD.senC + DE.senE$ (**1**), donde $sen\ X$ denota el seno del ángulo interno de vértice X del hexágono, el cual es igual al seno del respectivo ángulo externo, pues los mismos son suplementarios.

Pero por la ley de senos, sabemos que

$\dfrac{BF}{senA} = 2R_A$. Entonces dividiendo ambos lados de la desigualdad (**1**) por *senA*, obtenemos:

$$4R_A \geq AB.\frac{senB}{senA} + AF.\frac{senF}{senA} + CD.\frac{senC}{senA} + DE.\frac{senE}{senA} \;..... \text{ (I)}$$

De forma análoga, siguiendo los mismos pasos con las diagonales *BD* y *DF* del hexágono, obtenemos:

$$4R_C \geq BC.\frac{senB}{senC} + CD.\frac{senD}{senC} + AF.\frac{senA}{senC} + EF.\frac{senE}{senC} \;...\text{(II)}$$

$$4R_E \geq AB.\frac{senA}{senE} + BC.\frac{senC}{senE} + DE.\frac{senD}{senE} + EF.\frac{senF}{senE} \;...\text{(III)}$$

Y ahora, sumando (I), (II) y (III), obtenemos:

$$4(R_A + R_C + R_E) \geq AB.\left(\frac{senA}{senE} + \frac{senB}{senA}\right) + BC.\left(\frac{senC}{senE} + \frac{senB}{senC}\right) + CD.\left(\frac{senC}{senA} + \frac{senD}{senC}\right) +$$
$$+DE.\left(\frac{senE}{senA} + \frac{senD}{senE}\right) + EF.\left(\frac{senE}{senC} + \frac{senF}{senE}\right) + FA.\left(\frac{senA}{senC} + \frac{senF}{senA}\right).$$

Ahora observe que como los lados opuestos del hexágono convexo son paralelos, tenemos que los ángulos opuestos del mismo son congruentes. Asimismo, obtenemos: *senA* = *senD*; *senB* = *senE*; *senC* = *senF*.

Por consiguiente, tenemos que los factores que están multiplicando los lados del hexágono en la última desigualdad son de la forma (z + $\dfrac{1}{z}$), siendo *z* positivo (pues el seno de un ángulo mayor que 0° y menor que 180° es siempre positivo). Es fácil verificar que $z + \dfrac{1}{z} \geq 2$, para todo *z* positivo.

Asimismo obtenemos:

$$4(R_A + R_C + R_E) \geq 2(AB + BC + CD + DE + EF + FA) \Rightarrow$$
$$4(R_A + R_C + R_E) \geq 2p \Rightarrow R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2},$$

con esto concluye la demostración.

Solución: Los autores y traducción con muchos tropiezos por Aldo Gil.

Amigos, este número ya esta listo para aparecer en mi página Web, gracias a la entrañable ayuda de Juan Beltrán, ya no molestaremos a las listas, ni estaré expuesto a bochornos como los del año pasado, en fin eso es anécdota.

La Web, espero que resulte una herramienta de aprendizaje, contactos para información, foro de discusión, en fin no tengo mucha idea de cuales son los limites de una Web, pero va a ser mas de ustedes que mía, ojala les guste, y puedan aquí encontrar solución a sus problemas matemáticos todos mis hermanos de habla castellana.

Abrazos, Aldo