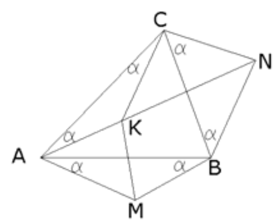
La pucha, que estuve embalado en Enero, cuatro números al hilo casi, vamos a ver como camina Febrero, todo depende como ande la chamba por aquí, si se pone brava, allí si nos jodimos, por que este humilde servidor también tiene que laborar para comer, y pues se hará lenta la entrega, pero de todas maneras haremos el esfuerzo.

Se habrán dado cuenta que la geometría me jala mucho, y bueno pues a veces abuso con los problemas de geometría, y con la chamba que me dan las figuritas, joder… pero al que quiere celeste que le cueste

Problema 1

Sea *ABCD* un rectángulo y sea *E* un punto en la diagonal *BD* con $\angle DAE = 15º$. Sea *F* un punto en *AB* con *EF* perpendicular a *AB*. Si sabemos que: $EF = \frac{1}{2}AB$ y $AD = a$. Encontrar la medida del ángulo $\angle EAC$ y la longitud del segmento *EC*.



Fuente: Olympic Mathematics Correspondence Problemas-Año 2002-Problema 57

Solución:

Empezamos con la siguiente observación, que tan $15º = 2-\sqrt{3}$. (Use *tan* $\theta = \frac{sen 2\theta}{(1+\cos 2\theta)^{-1}}$, ó *tan* θ = *tan*$(3\theta - 2\theta)$ con $\theta = 15º$). Sean a y b las longitudes de *AD* y *FE* respectivamente, tal que AF = $(2-\sqrt{3})$b y FB = $\sqrt{3}$ b. Entonces tan FEB= $\sqrt{3}$, entonces $\angle FEB = \angle ADB$ = 60º.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil

Problema 2

Tengo estas ecuaciones trigonométricas para resolver.

a) $sen\ x + \sqrt{3}\cos x = -1$

b) $\sqrt{2}(1+tg\ x) = \sec x$

Fuente: Propuesto por Nora Berdini - Grupo Matracas

Solución

a) $sen\ x + \sqrt{3}\cos x = -1$

Elevando al cuadrado

$sen^2 x + 3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\, sen\ x.\cos x = 1$

$sen^2 x + \cos^2 x + 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\, sen\ x \cos x = 1 = sen^2 x + \cos^2 x$

$2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\, sen\ x \cos x = 0$

$2(\cos^2 x + \sqrt{3}\, sen\ x \cos x) = 0$

$\cos^2 x + \sqrt{3}\, sen\ x \cos x = 0$

$\cos x (\cos x + \sqrt{3}\, sen\ x) = 0$

La primera deducción que hago es:

$\cos x = 0$

De aquí= x = 90º ó 270º

Reemplazando $x = 270º$ (en la ecuación solo esto cumple)

Creo que puedes hallar la otra solución, si: $\cos x + \sqrt{3}\, sen\ x = 0$

b) $\sqrt{2}(1+tg\ x) = \sec x$

Elevando al cuadrado:

$2(1+tg\ x)^2 = \sec^2 x$

$2(1+tg^2 x + 2tg\ x) = \sec^2 x$

$2 + 2tg^2 x + 4tg\ x = 1 + tg^2 x$

$Tg^2 x + 4tg\ x + 1 = 0$

Resolviendo la bicuadrada, obtenemos: $tg\ x = -2+\sqrt{3}$ y $tg\ x = -2-\sqrt{3}$

Todo esto huele a 15º por algún lado, y con la calculadora tenemos las dos respuestas: x_1 = -15º, x_2 = -75º

Solución: Integra de Aldo Gil (Seguro que están mal)

Problema 3

Demostrar que el triángulo cuyos lados *A*, *B*, *C* satisfacen la igualdad: $\frac{sen^2 A + sen^2 B + sen^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} = 2$, es un triángulo rectángulo.

Fuente: IMO Shortlist 1967, Poland, Problem 5

Solución

La solución es simple una vez que se conoce la identidad:

$sen^2 A + sen^2 B + sen^2 C = 2(\cos A.\cos B.\cos C + 1)$, la cual se cumple para un triángulo *ABC*. Esta identidad demuestra que, si hacemos $S = sen^2 A + sen^2 B + sen^2 C$, tenemos que *S* = 2, si y solo si $2.(\cos A \cos B \cos C + 1) = 2$, por ejemplo si $\cos A \cos B \cos C = 0$, o por ejemplo si *ABC* es rectángulo.

Ahora, como obviamente, $\cos^2 x = 1 - sen^2 x$, tenemos:

$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = (1 - sen^2 A) + (1 - sen^2 B) + (1 - sen^2 C)$

$= 3 - (sen^2 A + sen^2 B + sen^2 C) = 3 - S$.

Así, la condición dada en el problema: $\frac{sen^2 A + sen^2 B + sen^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} = 2$, es equivalente a $\frac{S}{3-S} = 2$. Pero esta es una ecuación lineal para *S* con la única solución *S* = 2. De aquí tenemos: $\frac{sen^2 A + sen^2 B + sen^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} = 2$, si y solo si *S* = 2. pero sabemos que *S* = 2 si y solo si el triángulo ABC es rectángulo. Nosotros tenemos: $\frac{sen^2 A + sen^2 B + sen^2 C}{cos^2 A + cos^2 B + cos^2 C} = 2$; si y solo si el triángulo ABC es rectángulo, y el problema esta resuelto.

Solución: Darij y traducción de Aldo Gil

Problema 4

Sencillamente magistral……

¿Existe un entero tal que su cubo sea igual a $3n^2+3n+7$, donde n es un entero?

Fuente: IMO Shortlist 1967, Poland, Problem 4

Solución 1

Tenemos que: $3n^2+3n+7 \equiv 4$ ó 7 (mod 9), mientras que los cubos perfectos son siempre congruentes 0, 1 ó 8 (mod 9). Por lo tanto, no hay soluciones.

Solución 2

Asumimos que k existe.

Tenemos $k^3-1= 3(n^2+n+2)$, so $k\equiv 1$ (mod 3). Sea $k=3a+1$. Entonces que:

$27a^3+27a^2+9a=3(n^2+n+2) \Leftrightarrow 9a^3+9a^2+3^a = n^2+n+2$, pero n^2+n+2, es divisible por 3. Tenemos una contradicción, luego k no existe.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil

Problema 5

Estos si son palabras mayores, muy académicos por cierto, cada vez me gusta mas este asunto ....hummmmmmm!!

Probar la inecuación trigonométrica: $cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}$, cuando: $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Fuente: IMO Shortlist 1967 – Bulgaria – Problema 3

Solución

Pequeño lema: $\frac{x^{2n}}{(2n)!} > \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ **donde** $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ **y** $n \in N$

Multiplicando tenemos:

$(2n+1)(2n+2).x^{2n} > x^{2n+2}$, lo cual es obvio porque: $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $n \in N$

Regresando a nuestro problema:

$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{24} - \frac{x^6}{6!} + \ldots < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} \quad - \frac{x^4}{48} - \frac{x^6}{6!} + \ldots < 0$, lo cual es verdadero usando nuestro lema.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil

Problema 6

Aquí vamos con el primer problema de la 1º Olimpiada Matemática de la cual se conoce orden establecido, realizada en Hungría en 1894!!!

Probar que las expresiones $2m + 3n$ y $9m + 5n$ son divisibles por 17 para los mismos pares de valores enteros m e n.

Fuente: 1º Olimpiada de Hungría 1894-Problema 1

Solución

Observe que $4(2m + 3n) + (9m + 5n) = 17(m + n)$. Por lo tanto, si $2m + 3n$ es múltiplo de 17, entonces $9m + 5n$ también lo será, y viceversa.

OBS: Esta aparente solución "mágica" no es la única forma de resolver este problema.

Solución: Aparecido en revista Eureka Nº 4 (Problemas antiguos) - con traducción de Aldo Gil.

Problema 7

En una página de OMA José Ignacio Heredia propuso el siguiente problema:

Hallar un número natural n tal que su cuadrado tenga 202 dígitos: los primeros 100 (desde la izquierda) todos iguales a 1, los siguientes 100 todos iguales a 2 y los dos últimos, desconocidos. Es decir, $n^2 = \underbrace{11.....11}_{100}\underbrace{222.....22}_{100}$

Fuente: Recopilado por Daniel Ricardo Suárez-Lista Snark 19 Octubre 2006.

Solución:

El número que te dan es: $M = \frac{10^{202}-1}{9} + \frac{10^{102}-1}{9} + (xy - 22)$; donde xy son las dos últimas cifras.

La raíz cuadrada es muy aproximadamente la raíz cuadrada del primer sumando, que es muy aproximadamente: $A = \frac{10^{101}}{3}$, número formado por 101 dígitos 3, y parte decimal 3 periódico.

El segundo sumando es aproximadamente $\left(\frac{10^{102}}{9}\right) \div \left(\frac{10^{101}}{3}\right) = \frac{10}{3} = 3.3333....$veces esa raíz cuadrada. La mitad de este factor es $1.6666...$ Por tanto:

$M = (A + 1.666...)^2 = 333....5^2 = \left(\frac{10^{101}-1}{3} + 2\right)^2$; donde tenemos 100 dígitos 3 antes del 5. Como la raíz cuadrada acaba en 5, las dos últimas cifras de M son 25. Es decir, M esta formado por cien unos, ciento un doses y un cinco.

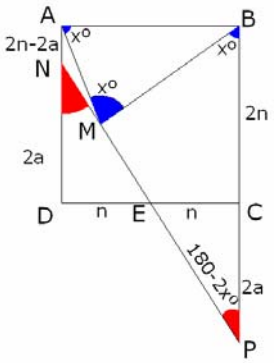
Solución: Resuelto por Ignacio Larrosa Cañestro, en forma brillante … como siempre.

Problema 8

Sea $ABCD$ un cuadrado de lados AB, BC, CD y DA. Si E es el punto medio del lado CD y M es el punto interior del cuadrado tal que $\angle MAB = \angle MBC = \angle BME$, calcular la medida del ángulo $\angle MAB$.

Fuente: Olimpiada Matemática Argentina 2006 – Sección Nacional – Problema 6

Solución:



$PM = PB = 2n + 2a$

$MN = AN = 2n - 2a$

$EN = PE = \frac{PM + MN}{2} = 2N$

En el triángulo PCE: $180 - 2x = 30$

Luego $x = 75°$

Solución: SL – Lima Perú publicada en la red.

Problema 9

Si $x^2 - y^2 = 2xy$, y x e y son positivos, encontrar la relación x/y.

Fuente: Adapted from a problem given in New York Interscholastic League Competitions during spring 1982, fall 1984, and spring 1985.

Solución

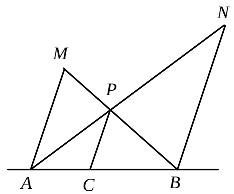
Dividiendo ambos miembros de la ecuación y^2 -y teniendo en mente que $y>0$-tenemos:

$\frac{x^2}{y^2} - 1 = 2.\frac{x}{y}$, y observamos que x/y es una raíz de la ecuación $w^2 - 2w - 1 = 0$.

Resolviendo la ecuación vemos que las raíces son: $w = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$, y como x/y debe ser positivo, tenemos que: $\frac{x}{y} = 1 + \sqrt{2}$

Solución: Resuelto por National Council of Teachers of Mathematics, adaptación y traducción por Aldo Gil.

Problema 10



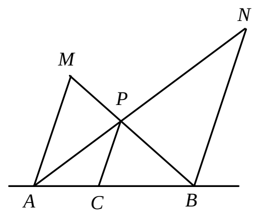
En la figura AM, BN y CP son paralelos.

Probar que: $\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} = \frac{1}{CP}$

Fuente: 12º Olimpiada de Hungría 1905-Problema 3

Solución

Utilizando semejanza de triángulos en la figura tenemos:

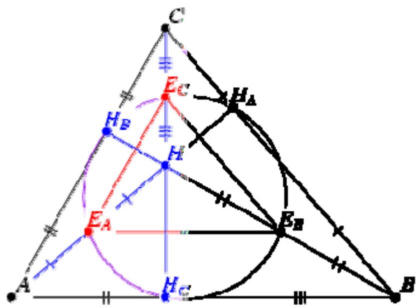


$\frac{CP}{AM} = \frac{CB}{AB}$, $\frac{CP}{BN} = \frac{AC}{AB}$, sumando tenemos:

$\frac{CP}{AM} + \frac{CP}{BN} = \frac{AC + CB}{AB} = 1$; de ahí, $\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} = \frac{1}{CP}$

Solución: Aparecido en revista Eureka Nº 4 (Problemas antiguos) - con traducción de Aldo Gil.

Muy bien amigos llegamos al final del número 35, no sin antes regalar este aperitivo (postre mejor?)

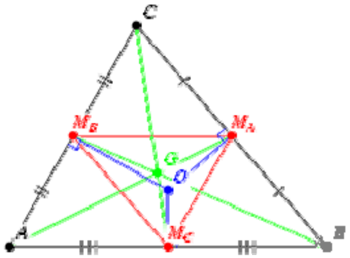


TRIANGULO DE EULER

El triángulo de Euler de un triángulo ΔABC es el triángulo $\Delta E_A E_B E_C$ cuyos vértices son los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro H con los vértices respectivos. Los vértices de este triángulo son conocidos como los puntos de Euler, y están en el círculo de los nueve puntos. El triángulo de Euler es congruente con el triángulo medio (ver nota abajo).

TRIANGULO DE EULER

El triángulo $\Delta M_A M_B M_C$ formado por la unión de los puntos medios de los lados del triángulo ΔABC, es llamado triángulo medio. El triángulo medio es algunas veces llamado triángulo auxiliar. (Dixon 1991).



Referencias

-Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L. "The Medial Triangle and Euler Line."

-Dixon, R. Mathographics. *New York: Dover, p. 56, 1991*