Estuve haciendo una revisión de los archivos que me viene de Harvard, y la verdad vi varias cosas interesantes, cortas, claras y bastante buenas. Luego tengo una colección bárbara de problemas de las listas cortas de Olimpíadas Matemáticas Internacionales, que las estoy traduciendo, y bueno aquí van un par de ellas.

Problema 1

Encontrar x si $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot}}}} = 2$.

Fuente: General Test Harvard MIT-2001-Problema 3

Solución:

La solución es por demás ingeniosa, y la colocamos como vino.

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = 2^{\frac{1}{2}.2\ldots} = 2^{1^{1^{1}}} = 2$, entonces: $x = \sqrt{2}$

Solución: Los proponentes, acomodo y traducción por Aldo Gil

Problema 2

Se tiene una circunferencia con dos cuerdas *AB*, que mide 6 cm, y *CD* que mide 8 cm, y que no se intersecan. Se sabe que la suma de los ángulos que subtienden las cuerdas es 180º. Se pide el área delimitada por la circunferencia y ambas cuerdas (entre una y otra).

Fuente: SAMLUMOR- Perú el 01-01-07

Solución:

Si llamamos *R* al radio de la circunferencia y α y β a los ángulos que subtienden las cuerdas, tenemos que:

$R.\ sen(\frac{\alpha}{2}) = 3$ y $R.\ sen(\frac{\beta}{2}) = 4$

$\alpha + \beta = 180º \Rightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90º \Rightarrow$

$\cos(\frac{\alpha}{2}) = sen(\frac{\beta}{2})$. Entonces,

$R^2.sen^2(\frac{\alpha}{2}) + R^2.\cos^2(\frac{\alpha}{2}) = 3^2 + 4^2 = 25$

$\Rightarrow R=5$

$sen(\frac{\alpha}{2}) = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = 2.arc\ sen\left(\frac{3}{5}\right)$

$sen(\frac{\beta}{2}) = \frac{4}{5} \Rightarrow \beta = 2.arc\ sen\left(\frac{4}{5}\right)$

El área de los segmentos circulares *AB* y *CD*, sin sombrear, se puede calcular como la del sector circular correspondiente menos la del triángulo.

$$S_{AB} = \frac{1}{2}\alpha.5^2 - 2.\frac{1}{2}sen\left(\frac{\alpha}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)5^2 = 25.\frac{\alpha}{2} - 12$$

$$= \frac{1}{2}\alpha.5^2 - 2.\frac{1}{2}sen\left(\frac{\alpha}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)5^2 = 25.\frac{\alpha}{2} - 12$$

$$S_{CD} = \frac{1}{2}\beta.5^2 - 2.\frac{1}{2}sen\left(\frac{\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)5^2 = 25.\frac{\beta}{2} - 12$$

entonces, el área pedida es

$$S_{ABCD} = 25.\pi - (25.\frac{\alpha}{2} - 12) - 25.\frac{\beta}{2} - 12)$$

$$= 25.\pi - 25.\frac{\alpha+\beta}{2} + 24$$

$$= 25.\pi - 25.\frac{\pi}{2} + 24$$

$$= 25.\frac{\pi}{2} + 24 = 63.26\ldots$$

Solución: Ignacio Larrosa Cañestro y adaptación de Aldo Gil

Problema 3

En un libro que tiene entre 1 000 y 2 000 páginas se han utilizado 85 tipos para enumerar las 25 últimas páginas impares, cuya cifra terminal es 3 ó 5. Si la suma de cifras de la última página es 13, indicar el número de páginas que tiene el libro.

Fuente: No me acuerdo de donde lo copie

Solución:

Evidentemente es sencillo calcular cuantas páginas de 4 cifras se enumeran, ya que 25.3=75, quiere decir que faltan 10 para el 85, por lo tanto hay 10 páginas de 4 dígitos. Son 1003,1005,1013,1015,1023,1025, 1033,1035,1043 y 1045. El libro tiene entre 1045 y 1052 páginas y la única que suma 13 es 1048

Primero, los números de las 25 páginas indicadas serán algunos de tres dígitos y otros de cuatro. Sabiendo que se usaron 85 dígitos para éstos debes determinar cuántos de 3 y cuántos de 4.

Supongamos que ya resolviste lo del párrafo anterior y te da que son 6 de cuatro dígitos (no es esta la respuesta, es que no quiero arruinarle la satisfacción de hallar la respuesta a los que la busquen). Entonces los 6 números serían:

1003
1005
1013
1015
1023
1025

Por lo tanto la última página está entre la 1025 y la 1032 (1033 no, porque si no debería estar incluida en la lista anterior). Solo falta buscar de éstos cuál es aquel cuyos dígitos suman 13 (no hay, pero comenzando con la respuesta correcta de la primer parte sí se encuentra uno)

Solución: De la misma lista de donde no me acuerdo.

Problema 4

Sea A un punto fijo interior del circulo C de centro O y radio r ($0<OA<r$). Trazamos las cuerdas BC y DE tales que pasen por A y sean perpendiculares entre si. ¿Para que posición de las cuerdas la suma $BC+DE$ toma su maximo valor?

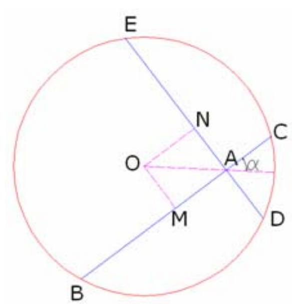
Fuente: Replacement IMO 1980-Problema LU-2 Propuesto por Luxemburgo

Solución:

Sean M y N los puntos medios de las cuerdas BC y ED respectivamente:

$BC=2.BM= 2\sqrt{r^2-OM^2}$

$DE=2.DN=2\sqrt{r^2-ON^2}$



Tenemos:

$(BC+DE)^2+(BC-DE)^2= 2.(BC^2+DE^2)$

$=2.4(r^2-OM^2+r^2-ON^2) = 8.(2r^2-(OM^2+ON^2))$

$= 16r^2-8OA^2$

De aquí se obtiene: $(BC+DE)^2=16r^2-8OA^2-(BC-DE)^2$.

Así el máximo valor será: $2\sqrt{4r^2-2OA^2}$

Solución: Los proponentes, traducción, dibujo y adaptación por Aldo Gil

---

Problema 5

*Este problemita de geometría, es bastante didáctico y con solución formal y rigurosa. Me encanto a pesar del *, quise cambiarlo, pero prefiero dejarlo como esta, total así viene el original……*

El incentro del triángulo ABC es K. Los puntos medios de AB y AC son C_1 y B_1 respectivamente. Las líneas C_1K y AC se cortan en B_2, y las líneas B_1K y AB se cortan en C_2. Si las áreas de los triángulos AB_2C_2 y ABC son iguales. Hallar el ángulo $\measuredangle CAB$.

Fuente: Lista Corta de Problemas - Preparación para Olimpiadas – Hungría Problema 3

Solución:

Sean $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$, $b^*=C_2A$, $c^*=AB_2$, $S=\frac{1}{2}(a+b+c)$. Sea r el inradio de ABC.

(Δ=Área del triángulo)

En consecuencia: $\Delta AC_1B_2=\frac{AC_1.AB_2}{AB.AC}\Delta ABC=\frac{c^*.r.s}{2b}$.

$\Delta AKB_2=\frac{c^*.r}{2b}$, $\Delta AC_1K=\frac{c.r}{4}$, tenemos $\frac{c^*rs}{2b}-\frac{c^*r}{2}=\frac{cr}{4}$, entonces: $\frac{c^*}{b}-\frac{c^*}{s}=\frac{c}{2s}$

De aquí: $(a-b+c).c^* = bc$. Análogamente, $(a+b-c).b^*=bc$.

Combinando con $b^*c^* = bc$, obtenemos $a^2-(b-c)^2 = bc$.

$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$. Como el lado izquierdo es $\cos A$, entonces $\measuredangle CAB.=60°$.

Solución: Los proponentes con traducción y adaptación de Aldo Gil

---

Problema 6

Probar que todos los números de la secuencia:

$\frac{107811}{3}, \frac{110778111}{3}, \frac{111077781111}{3}$……. son cubos exactos

Fuente: IMO Shortlist 1967 – Bulgaria – Problema 1

Solución

Sea $\geq\{a_n\}$ la secuencia requerida, con n número natural, entonces el término general es definido por: $a_n=\underbrace{111..11}_{n\ veces}0\,\underbrace{777...77}_{n\ veces}\,8\,\underbrace{111....11}_{n+1\ veces}:3$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1.(10^{3n+2}+10^{3n+1}...+10^{2n+3})+7.(10^{2n+1}...+10^{n+2})+8.10^{n+1}+1.(10^n+10^{n-1}...+1}{3}$$

Tenemos en el numerador tres sumas de tres secuencias geométricas con factor común 10, tal que, dos tiene n términos y el otro tiene n+1 términos, en consecuencia

$$\Rightarrow a_n=\frac{10^{2n+3}(1-10^n)+7.10^{n+2}(1-10^n)-72.10^{n+1}+1.(1-10^{n+1})}{-9.3}$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{-10^{3(n+1)}+3.10^{2(n+1)}-3.10^{n+1}+1}{3^3}$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{-(10^{n+1}-1)(10^{2(n+1)}+10^{n+1}+1)+3.10^{n+1}(10^{n+1}-1)}{-3^3}$$

$\Rightarrow a_n = \left(\dfrac{10^{n+1}-1}{3}\right)^3$, significa que todo el término de la sucesión puede ser representado como un cubo exacto.

Problema 7

Resolver el sistema de ecuaciones:

$x^2+x-1=y$	$y^2+y-1=z$	$z^2+z-1=x.$

Fuente: IMO Shortlist 1967 – Bulgaria – Problema 5

Solución

Bien formal y rigurosa la solución……

Sea (x, y, z) solución de este sistema. Entonces sea $a = x+1$, $b = y+1$ y $c = z+1$. Entonces, $x = a-1$ y $y = b-1$, para que la ecuación $x^2+x-1=y$, se convierta en $(a-1)^2+(a-1)-1=b-1$, o su equivalente $a^2-a-1=b-1$.

Simplificando: $a^2-a=b$, de aquí: $a^2=a+b$. en forma similar, $b^2=b+c$ y $c^2=c+a$. De aquí: $(a-b).a^2=(a-b)(a+b)=a^2-b^2=(a+b)-(b+c)=a-c=-(c-a)$. En forma similar, $(b-c).b^2=-(a-b)$ y $(c-a).c^2=-(b-c)$. Multiplicando estas tres ecuaciones tenemos: $(a-b).a^2.(b-c).b^2.(c-a)c^2=(-(c-a)).(-(a-b)).(-b-c))$.

Ahora si los números $b-c$, $c-a$ y $a-b$ son diferentes de cero, podemos dividir esta ecuación por $(b-c).(c-a).(a-b)$ y obtener $a^2b^2c^2=-1$, que es imposible, debido a que $a^2b^2c^2 \geq 0$, (todos los cuadrados son siempre positivos).

Implica que los números $b-c$, $c-a$ y $a-b$ no pueden ser todos diferentes de cero, uno de ellos debe ser cero. Podemos asumir que $b-c$ = 0. Entonces, $b = c$, por lo que $y=z$ (debido a que $b = y+1$ y $c= z+1$). De aquí la ecuación $y^2+y-1=z$, implica que $y^2+y-1=y$, por lo que $y^2=1$. Así $y = 1$ ó $y = -1$.

Si y = 1, entonces y = z, z = 1, y por lo tanto $x=z^2+z-1=1^2+1-1=1$, y obtenemos la solución $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Una verificación trivial muestra que la terna (*x, y, z*) = (1, 1, 1) es de hecho una solución de nuestro sistema de ecuaciones.

Si $y=-1$, entonces $y=z$, $z = -1$, $x=z^2+z-1=(-1)^2+(-1)-1=-1$, y obtenemos la solución (*x, y, z*) = (-1, -1, -1). Una verificación trivial muestra que la terna $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$ es de hecho una solución de nuestro sistema de ecuaciones.

Luego nuestro sistema de ecuaciones tiene dos soluciones (*x, y, z*) = (1, 1, 1) y (*x, y, z*) = (-1, -1, -1)

Solución: Los proponentes con traducción y adaptación de Aldo Gil

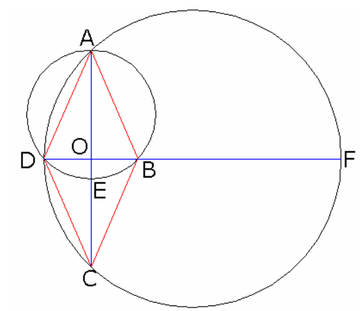
---

Problema 8

Encontrar el área de un rombo *ABCD* si los radios de los círculos circunscritos a los triángulos *ABD* y *ACD* son 12.5 y 25, respectivamente.

Fuente:American Invitational Mathematical Exam AIME 2003 – Problema 7

Solución:



Sea *O* el punto de intersección de las diagonales *AC* y *BD*, y *E* el punto de intersección de *AC* y el circuncírculo del triángulo *ABD*. Prolongamos *DB* hasta cortar el circuncírculo del triángulo *ACD* en *F*. Por teorema tenemos:

AO.OE = BO.OD y DO.OF = AO.OC.

Sea $AC=2m$ y $BD=2n$. Debido a que *AE* es el diámetro del circuncírculo de *ABD*, y *DF* el diámetro del circuncírculo de *ACD*, la igualdad podemos escribirla como $m(25-m)=n^2$ y $n(50-n)=m^2$, ó $25m=m^2+n^2$ y $50n=m^2+n^2$

Por consiguiente: $m=2n$.De aquí podemos deducir que: $50n=5n^2$, de aquí $n=10$ y $m=20$.Como: $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}.AC.BD = 2.m.n = 400.$

Solución: por los proponentes, traducción y adaptación por Aldo Gil.

Problema 9

Un triángulo ABC y un punto D en su plano satisfacen las relaciones: $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{CA}{BD} = \dfrac{AB}{CD} = \sqrt{3}$. Probar que ABC es equilátero y D es su centro.

Fuente: Replacement IMO 1980-Problema GB-5 Propuesto por Gran Bretaña

---

Solución:

Por una conocida propiedad de los centroides tenemos:

$AD^2+BD^2+CD^2 =$

$AG^2+BG^2+CG^2+3DG^2$…………….(*I*); donde *G* es el centroide de *ABC*. Sea $a=BC$, $b=CA$, $c=AB$. Si *A´* es el punto medio de

BC, luego *AA´* es $\frac{3}{2}$AG, entonces: $b^2+c^2=2AA'^2+2\left(\frac{1}{2}a\right)^2$, de donde: $AG^2=\frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2)$.

Con resultados similares para *B* y *C* obtenemos:

$AG^2+BG^2+CG^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$.

En consecuencia $AD=\frac{a}{\sqrt{3}}$; $BD=\frac{b}{\sqrt{3}}$ y $CD=\frac{c}{\sqrt{3}}$, la ecuación *(I)* muestra que *DG=0, D=G.* Tenemos ahora: $AG^2=AD^2=\frac{1}{3}a^2=\frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2)$, de donde $b^2+c^2=2a^2$. En forma similar: $c^2+a^2=2b^2$ y de aquí: $a^2=b^2=c^2$, $a=b=c$. *ABC* es equilátero.

Solución: Los proponentes con traducción y adaptación de Aldo Gil

<u>*Problema 10*</u>

Sean k_1 y k_2 dos círculos con centros O_1 y O_2 y radios iguales *r* tales que $O_1O_2=r$. Sean A y B dos puntos en el círculo k_1 y simétricos, con respecto a O_1O_2. Sea P un punto arbitrario en k_2. Probar que: $PA^2+PB^2 \geq 2r^2$.

Fuente: IMO Shortlist 1967, Hungary, Problem 4

<u>Solución:</u>

Desde que $O_1O_2= r$ es el radio de los círculos k_1 y k_2 implica que el punto O_1 esta en el circulo k_2, y que O_2 esta en el circulo k_1

Desde que los puntos *A* y *B* son simétricos con respecto a O_1O_2, el punto medio *M* de *AB* esta en la línea O_1O_2, y AB es perpendicular a O_1O_2

Ahora debido a que *M* es el punto medio de *AB*, el segmento *PM* es la mediana en el triángulo *APB*, y aplicando la conocida fórmula de la mediana en un triángulo, obtenemos: $4.PM^2=2.(PA^2+PB^2)\ -AB^2$, reacomodando: $PM^2+AB^2=2.(PA^2+PB^2)$.

Ahora tenemos que probar que: $PA^2+PB^2 \geq 2r^2$, que podemos escribir como: $2.(PA^2+PB^2)\geq 4r^2$. A luz de la ecuación: $4.PM^2+AB^2=2.(PA^2+PB^2)$, esta se vuelve equivalente a $4.PM^2+AB^2\geq 4r^2$

Pero probar que $4.PM^2+AB^2\geq 4r^2$ es realmente fácil: entre todos los puntos en el circulo k_2, el punto O_1 es el mas cercano al punto *M*, en consecuencia O_1

es el punto donde MO_2 corta a k_2. De aquí como P es un punto en el círculo k_2, tenemos que: $PM \geq O_1M$.

Ahora, desde que *AB* es perpendicular a O_1O_2, el triángulo AMO_1 es rectángulo; y aplicando el teorema de Pitágoras tenemos $O_1M^2+AM^2= O_1A^2$. Debido a que O_1A es claramente el radio *r* del círculo k_1, obtenemos que: $O_1M^2+AM^2=r^2$. En consecuencia PM $\geq O_1M$ tenemos $PM^2+AM^2 \geq r^2$.

Multiplicando esta inecuación por 4, obtenemos: $4.PM^2+ 4.AM^2 \geq 4.r^2$. Ahora, $4.AM^2=(2.AM)^2=AB^2$(desde que *AB=.2.AM*), porque el punto *M* es punto medio del segmento *AB*); de aquí tenemos que: $4.PM^2+AB^2 \geq 4r^2$. Prueba completa.

Solución: Los proponentes con traducción y adaptación de Aldo Gil

Mis queridos amigos:

No imagine estar tan embalado, e hacerme en un mes cuatro numeros, pero alli estan, lo que pasa es que hice trampa, la lap-top, funciono bien en la playa, y a pesar de las puteadas de la señora, siempre le sacaba la vuelta (traduciendo problemas), por eso es que hay material. Aun queda como para un número mas, de allí a empezar a traducir de nuevo, lo único nuevo del mes son los short list de la IMO, el reto es material bancado en vacaciones.

Abrazos a todos mis amigos de habla hispana, y besos muy grandes para las amigas de habla hispana.

Hasta la próxima y ojala salgan todos los dibujitos, sino pues como me dijo una amiga, a usar la imaginación (también es una manera de practicar)

Saludos cordiales,

Aldo Gil desde mi riquísima

Lima-Perú

"Como te amo ciudad
A pesar que me maltrates
Con tus ruidos de los coches,
Con los políticos turbios,
Con la miseria que muestras,
Así te amo ciudad, porque quiero hacerte limpia y grande "
Aldo Gil Crisóstomo
05 Mayo 1954

Todavía le falta para lo otro…..