Aquí vamos con el segundo número del presente año 2007.

Vamos a dedicarlo en su primera parte a la trigonometría, y luego como siempre problemas variados.

Esta sección de trigonometría, figura en mi trabajo personal y corresponde a una práctica que propuse en el año 1979 cuando laboraba en la academia Matemática Sigma, en Lima, y por supuesto la debía resolver yo mismo, para que sean publicadas las soluciones en las vitrinas. Añoro esas épocas.

Ojala y les gusten los problemas

Problema 1

Simplificar: $y=8sen^5x+3senx.cos2x+4sen^3x+sen2x.cos3x$

Fuente: IV Práctica de Trigonometría-Academia Sigma -1979-Problema 2

Solución:

$y=4sen^3x(2sen^2x-1)+3senx.\cos 2x+sen2x.\cos 3x.$

$y=\cos 2x\ (3senx - 4\ sen^3x)+sen\ 2x.\cos 3x.$

$y= \cos 2x.sen3x+sen2x.\cos 3x = sen(2x+3x)= sen\ 5x.$

Problema 2

Hallar M para que se cumpla la siguiente igualdad: $M.\cot 3A\ (1+2\cos 2A)=(2\cos 2A)-1)$

Fuente: IV Práctica de Trigonometría-Academia Sigma -1979-Problema 5

Solución:

$$M=\left(\frac{4\cos^2 A-2-1}{1+2-4sen^2A}\right)\left(\frac{sen3A}{\cos 3A}\right)$$

$$M=\left(\frac{4\cos^2 A-3}{3-4sen^2A}\right)\left(\frac{senA(3-4sen^2A)}{\cos A(4\cos^2 A-3)}\right)9^x=3\Rightarrow 9^x=9^{1/2}\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$M=\tan A$$

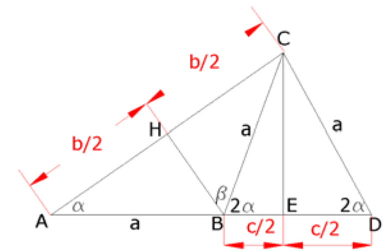
Problema 3

En este problemita no me quiere salir la figurita (El PDF reproduce la imagen deformada), así que por eso "dicto" el dibujo. ¿Será mi Acrobat de mala familia?

En triángulo ACD, de lados $AC = b$, $CD=a$, se traza $CB= a$, (B sobre AD, de tal forma que $AB=a$ y $BD = c$. Hallar c en función de a y b.

Fuente: IV Práctica de Trigonometría-Academia Sigma -1979-Problema 1

Solución:



En el triángulo BEC: $\cos 2\alpha=\dfrac{\frac{c}{2}}{a}$

$\Rightarrow c=2a.\cos 2\alpha$ ......(1)

En el triángulo AHB: $\cos\alpha=\dfrac{\frac{b}{2}}{a}$

$\Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{b}{2a}$......(2)

Reemplazando (2) en (1): $c=2a\left(2\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2-1\right)$, y reduciendo: $c=\dfrac{b^2-2a^2}{a}$.

Problema 4

Simplificar: $y=\dfrac{sen^4 3a+\cos^4 3a-\cos 6a}{1-(sen^4 3a-\cos^4 3a)^2}-\dfrac{\sec^2 3a}{2}$

Fuente: IV Práctica de Trigonometría-Academia Sigma -1979-Problema 8

Solución:

$$y=\frac{1-2sen^2 3a.\cos^2 3a-1+2sen^2 3a}{1-(\cos^2 3a-sen^2 3a)^2}-\frac{\sec^2 3a}{2}\Rightarrow$$

$$y=\frac{2sen^2 3a(1-\cos^2 3a)}{1-\cos^2 6a}-\frac{\sec^2 3a}{2}\Rightarrow y=\frac{2sen^4 3a}{4sen^2 3a.\cos^2 3a}-\frac{\sec^2 3a}{2}$$

$$y=\frac{\tan^2 3a}{2}-\frac{\sec^2 3a}{2}\Rightarrow y=-0,5$$

Problema 5

Calcular: $y=\cot 54^o(4\cos 54^o-3\sec 54^o)$

Fuente: IV Práctica de Trigonometría-Academia Sigma -1979-Problema 10

Solución:

$$y=\cot 54^o\left(4\cos 54^o-\frac{3}{\cos 54^o}\right)$$

$$y=\cot 54^o\left(\frac{4\cos 54^o-3}{\cos 54^o}\right)$$

$$y=\cot 54^o\left(\frac{4\cos^3 54^o-3\cos 54^o}{\cos^2 54^o}\right)$$

$$y=\cot 54^o\left(\frac{\cos 162^o}{\cos^2 54^o}\right)$$

$$y=\cot 54^o\left(-\frac{\cos 18^o}{\cos^2 54^o}\right)$$

$$y=\cot 54^o\left(\frac{\cos(90^o+18^o)}{\cos^2 54^o}\right)$$

$$y = \cot 54^o\left(\frac{sen108^o)}{\cos^2 54^o}\right)$$

$$y = \cot 54^o\left(-\frac{2sen54^o \cos 54^o}{\cos^2 54^o}\right)$$

$$y = \cot 54^o\left(-2\tan 54^o\right) = -2$$

Problema 6

Sean dos funciones S y T definidas por $S(x) = -\frac{1}{x}$ y $T(x) = x+1$. Escriba la composición de S y T como $S \circ T$, o sea $(S\circ T)(x)=S(T(x))$. Calcule la expresión: $(S\circ T)^{2003}(x)$.

Fuente: VII OLIMPIADA REGIONAL DE MATEMATICA- SANTA CATARINA – UFSC-Entrenamiento 9 – 2º fase de 2004-Nivel 3--Problema 2

Solución

Note que: $(S\circ T)(x)=S(T(x))=S(x+1)=-\frac{1}{x+1}$.

$$(S\circ T)^2(x)=(S\circ T)\left(-\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{1}{-\frac{1}{x+1}+1}=-\frac{x+1}{x}$$

$$(S\circ T)3(x)=(S\circ T)\left(-\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{1}{-\frac{1}{x+1}+1}=-\frac{x}{-1}=x\,.$$

Asimismo, $(S\circ T)3=I$ (identidad). Como $2003 = 667.3 + 2$, entonces:

$$(S\circ T)^{2003}(x)=(S\circ T)^2(x)=-\frac{x+1}{x}$$

Solución: Respuesta oficial, adaptación, y traducción de Aldo Gil

Problema 7

Uno de los recibos para un torneo de matemática mostró que 72 trofeos idénticos se compraron para $_99.9_, donde el primer y último dígito son ilegibles. ¿Cuánto costó cada trofeo?

Fuente: Harvard-MIT Math Tournament-1999-Advanced Topics-Problem AT1

Solución:

El precio debe ser divisible por 8 y 9. Esto implica que los últimos tres dígitos deben ser divisibles por 8, de aquí el precio termina en 992, y el primer digito

debe ser 7 para que el número sea divisible por 9. De aquí el costo total es $799.92.

El costo de cada trofeo será $ 799.92/72 = $ 11.11

Solución: Resuelto por los proponentes de la prueba, traducción de Aldo Gil C.

Problema 8

Expresar el valor de sen 3º en radicales.

Fuente: Baltic Way 1991-Mathematical Team Contest – Problema 10

Solución

Usaremos la igualdad: $sen\ 3^o = sen\ (18^o-15^o) = sen\ 18^o.\cos 15^o + \cos 18^o.sen\ 15^o$.

Donde $sen\ 15^o = sen\left(\frac{30}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos 30}{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

y $\cos\ 15^o = \sqrt{1-sen^2 15^o} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Para calcular $\cos 18^o$ y $sen\ 18^o$, notamos que $\cos(3.18^o) = sen\ (2.18^o)$. Como $\cos 3x=\cos^3x-3\cos x sen^2x=\cos x(1-4sen^2x)$ y $sen\ 2x = 2.senx.\cos x$, tenemos: $1-4sen^2 18^o = 2.sen\ 18^o$. Resolviendo esta ecuación cuadrática, tenemos que $sen\ 18^o = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (descartamos $\frac{-\sqrt{5}-1}{4}$ por ser negativa) y $\cos 18^o=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

A partir de aquí es cuestión de efectuar $sen\ 3^o$ =

$$\frac{\sqrt{5}-1}{4}.\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Solución: Resuelto por los proponentes y traducción de Aldo Gil

Problema 9

*A veces son buenos los facilitos, sobre todo creo importante cuando en los primeros años de escuela se enseña a jugar con los números, pues este tema es pura conjetura, deducción, y lógica y un saber que tenemos diez dedos y por eso usamos la **base 10**, luego ir viendo las unidades, decenas, etc., va dando pautas de aprendizaje y lo que llamaría un "diseño cerebral" (algoritmo inventado por mi), para el desarrollo de las cuentas. Bueno es mi opinión.......*

Un número esta formado por cifras seguidas de un 4, un segundo número esta formado por estas dos cifras precedidas de un 4. El segundo número es 400 unidades mayor, cuando el segundo es 400 unidades menor. ¿Cuales son esos números?

Fuente: Problemi di Giochi di Archimede-Italia- Número 0-Problema 2

Solución:

Describamos el primer número como $100a+10b+4$ con $0\le a,b\le 9$.

El segundo número se podrá escribir como *400+10a+b* y la hipótesis del problema nos dice que: *(400+10a+b)-400=400-(100a+10b+4)*

Reduciendo obtenemos *110a+11b=396*, y dividiendo por 11, se obtiene *10a+b=36*, de donde resulta que *a*=3 y *b*=6, luego los números pedidos serán 364 y 436.

Nota del Departamento de edición (o sea yo). No se especifica si el segundo número lleva las cifras invertidas, así que asumí lo que quería, seria bueno hacer la prueba si el número es $\overline{4ba}$

Solución: Resuelto por David Grossi con traducción del italiano por Aldo Gil

---

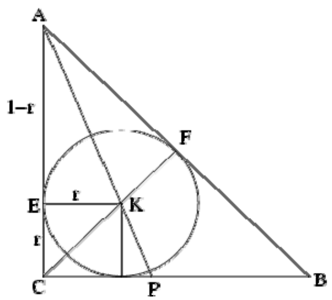
Problema 10

En un triángulo rectángulo *ABC*, *AC=BC,* la bisectriz del ángulo *A* corta a *BC* en *P*. Probar que la longitud de *PB* es igual al diámetro del circulo inscrito en *ABC*.

Fuente: Problems "C" in Setember, 2002-May 2003-Komal-Math-Hungria-Problem C.683

Solución:

Sea la longitud de los catetos igual 1, entonces la hipotenusa vale $\sqrt{2}$. Sabemos que *AF=BF=AE*=1-*r*, y *AF+FB=AB*, esto es, $2(1-r)=\sqrt{2}$, de donde: $r=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. Si seguimos en forma similar con los triángulos *AEK* y *ACP* nos dan $CP=\frac{r}{1-r}$,y $PB=1-\frac{r}{1-r}$. Por sustitución el valor de *r*



obtenido, y reacomodando la expresión, tenemos que: $PB=2-\sqrt{2}$, lo cual es realmente igual a 2*r*, la longitud del diámetro del circulo.

Solución: Resuelto por los proponentes con traducción de Aldo Gil.

Hasta aquí nuestro número 32, espero que les guste, vamos recargando pilas porque tengo nuevo material.

Abrazos,

Aldo