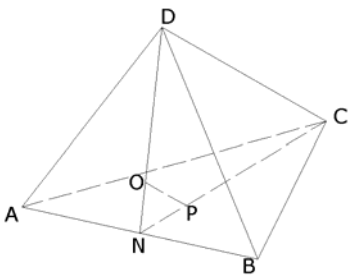
Y empezamos el 2007 como siempre con muchas ganas, aquí en Perú los chicos andan de vacaciones tanto en las escuelas como en las universidades, llega el verano y pues así funciona el sistema, y como en otros lares la cosa es distinta … joder escribimos para los otros lares. El primer problema lo hice el primer día de año, en horas de relajo de la Noche Vieja, sabrán ustedes que yo no bebo alcohol y mi disfrute es alejarme del ruido, fiestas, celulares, nextel, y pues la paso bien en silencio y paz con mi pareja, pues mis hijos ya hacen su vida. Y bueno cada uno se divierte como le de su gana, a veces prefiero la filosofía del silencio, pues vivo todo el año entre ruido de teléfonos celulares, radios y nextel, y me tiene hinchado.

<u>*Problema 1*</u>

En un tetraedro regular los centros de las cuatro caras son los vértices de un tetraedro más pequeño. La relación de volúmenes del más pequeño al mayor es m/n, donde m y n son enteros positivos y primos relativos. Hallar *m+n.*

Fuente: American Invitatuional Mathematical Exame AIMI 2003-Problema 4

<u>Solución:</u>



Sean *O* y *P* los centros de las caras *DAB* y *ABC* respectivamente, de un tetraedro regular *ABCD*. *DO* y *CP* se interceptan en el punto medio *N*. De aquí: $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}\ \frac{NO}{ND} = \frac{NP}{NC} = \frac{1}{3}$, los triángulos *NOP* y *NDC* son semejantes, y *3OP= DC*. Debido a que los tetraedros son semejantes, la relación de sus volúmenes es el cubo de la relación de sus lados correspondientes, numéricamente: $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, y como ellos son primos, *m+n*=28.

Solución: Resuelto por los proponentes de la prueba, traducción de Aldo Gil el 1º Enero 2007.

Uno cortito pero venenoso, con una simple demostración, estos son los problemitas donde a veces nos vamos por la tangente.

<u>*Problema 2*</u>

ABC es un triangulo acutángulo con circuncentro *O*. El circuncírculo de *ABO* intercepta a *AC* y *AC* en *M* y *N*. Demostrar que el circunradio de *ABO* y *MNC* son los mismos.

Fuente: 25th ASU 1991 - Rusia- problema 13

<u>Solución</u>

Es suficiente demostrar que: $\angle MBN = \angle C$. Pero $\angle MBN = \angle MBO + \angle OBN = \angle MAO + \angle OBN = \angle MCO + \angle OCN = \angle C$.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil

Parece que me agarro la verborrea de la Geometría, pues vamos adelante

<u>*Problema 3*</u>

Sea *A,B,C* los ángulos de un triángulo acutángulo. Probar la inecuación: *sen A + sen B > cos A + cos B + cos C.*

Fuente: Baltic Way 1991-Mathematical Team Contest – Problema 7

<u>Solución:</u>

En un triángulo acutángulo tenemos $A+B > \frac{\pi}{2}$, de aquí $sen\ A > sen(\frac{\pi}{2} - B) = cos\ B$ y $sen\ B > cos\ A$. Usando las inecuaciones tenemos que: $(1 - sen\ A)(1 - sen\ B) < (1 - cos\ A)(1 - cos\ B)$

$sen\ A + sen\ B > cos\ A + cos\ B - cos\ A.cos\ B + sen\ A.sen\ B$

$= cos\ A + cos\ B - cos\ (A+B)$

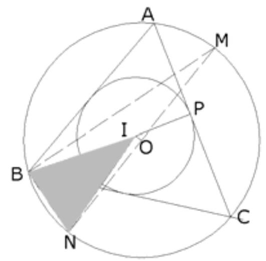
$= cos\ A + cos\ B + cos\ C.$

Solución: Resuelto por los proponentes y traducción de Aldo Gil.

Aquí si me tomó trabajo la traducción del catalán, aprécienlo es muy didáctico

<u>*Problema 4*</u>

Demostrar que el valor absoluto de la potencia *k* del incentro *I* de un triángulo *ABC*, respecto a la circunferencia circunscrita es igual al doble del producto de los radios *r* y *R* de las circunferencias inscrita y circunscrita respectivamente, es decir: $|k| = 2rR$.



Fuente: Problema del mes de Julio y Agosto 2006-Aquí Matematics-Cataluña

<u>Solución:</u>

Sea el triángulo ΔABC, sean *I* y *O* el incentro y el circuncentro, *R* y $r = \overline{IP}$ el circunradio, y el inradio del triángulo respectivamente.

Trazamos N como el punto de intersección de la bisectriz del ángulo A a la circunferencia circunscrita, y M el punto diametralmente opuesto a N.

El ángulo $\angle BIN$ es exterior al triángulo ΔBIA, por lo tanto $\angle BIN = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$, pero,

$$\angle NBI = \angle NBC + \frac{\hat{B}}{2} = \angle NAC + \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$$ y

el triángulo ΔIMB es isósceles con BN=IN. Por otro lado el triángulo rectángulo ΔBMN es semejante a ΔPAI, porque:

$\angle BMN = \angle BAN = \frac{\hat{A}}{2} = \angle NAC = \angle IAP$, y en consecuencia: $\frac{\overline{NM}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{2R}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{IP}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{r}}$,

y obtenemos: $2Rr = \overline{BN}.\overline{IA}$. Pero $\overline{BN} = \overline{IN}$, en consecuencia: $2Rr = \overline{IN}.\overline{IA}$, que es el valor absoluto de la potencia, k de incetro I respecto a la circunferencia circunscrita al triángulo ΔABC. Ahora como I es interior a la circunferencia, k<0, de donde: k=-2$R.r$, como queríamos demostrar.

Queda para demostración del lector, el teorema de Euler. $D^2=R^2-2.R.r$, y de aquí deducir la desigualdad de Euler.

Solución: Resuelto por los proponentes y traducción del catalán!!! por Aldo Gil.

<u>*Problema 5*</u>

De vez en cuando es bueno irse a Cálculo Superior, con estas cosillas, simples pero que pueden ayudar a soltarse al estudiante, sobre todo cuando ven los límites como una brujería, y a las derivadas e integrales, como dignas de exorcismos, (lo que si declararía fuera de la ley son las Transformadas de Laplace y esas cosas), la verdad de eso no van a ver nunca en estos folletitos, disculpen la herejía y no se ofendan los que dominan el tema, pero yo si me quede en la historia, me fui por las ramas con la carrera de ingeniería, y pues hombre, quedo en el anecdotario de la pruebas desaprobadas y pasadas con mucho esfuerzo, pero sin el mayor interés de aprendizaje. La verdad si son difíciles.

Evaluar: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$.

Fuente: Calculus II L'Hopital's Rule - Calculus: Concepts and Contexts, James Stewart, p. 305.

<u>**Solución:**</u>

Debido a que la sustitución directa produce la indeterminación 0/0, podemos utilizar la regla de H'ospital. De hecho, como substitución en ese punto lleva de nuevo a la forma indeterminada, aplicamos H'ospital dos veces mas antes podemos sustituir para conseguir $\frac{2}{6}$ ó $\frac{1}{3}$. Recordemos eso para tomar la

derivada de $(sec\ x)^2$, usamos la regla de la cadena dos veces, y obtenemos $2(sec\ x).(sec\ x)'$, y entonces tomamos la derivada de $sec\ x$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x.\tan x}{6x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{4\sec^2 x.\tan^2 x + 2\sec^4 x}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Solución: Resuelto en el libro y traducción de Aldo Gil.

Algo así medio elemental nomás, para no perder la pista de la sencillez.

<u>*Problema 6*</u>

Encontrar el sistema de base desconocido n. tal que la ecuación alfanumérica *KYOTO* + *KYOTO* + *KYOTO* = *TOKYO* tenga solución en la base n. (Como es usual, cada letra denota un dígito en este sistema, y letras diferentes son dígitos diferentes)

Fuente: V. Dubrovsky, A. Shvetsov- CyberTeaser - Mayo-Junio 1995-Problema B144-Quantum

---

<u>**Solución:**</u>

Inspeccionando el primer dígito de la derecha en la ecuación dada, encontramos que $2\times O$ es divisible por n. Por lo tanto $O = 0$ ú $O = n/2$. En el segundo caso, del tercer dígito podemos decir $K > n/2$, pero del quinto podemos ver que $3\times K \le T \le n-1$, tal que $K < n/3$. Deducimos que O=0. Ahora veamos estas ecuaciones $3\times T = Kn+Y$ (del segundo y tercer dígitos), $3\times Y = cn$ (donde c es el número llevado del cuarto al quinto digito), y $3\times K+c=T$ (el quinto dígito). Multiplicando la primera ecuación por 3 y sustituyendo las expresiones por $3Y$ y $3K$ de las otras ecuaciones, tenemos $9T=(T-c)n + cn$, y luego $n = 9$. Hemos verificado si existe al menos una solución, y en efecto hemos encontrado cuatro: *KYOTO* = 13040, 16050, 23070, ó 26080.

Solución: Resuelto por Revista Quantum - Traducción de Aldo Gil

---

<u>*Problema 7*</u>

¿Cuales son las soluciones reales de la ecuación: $x^y = y^x$?

Fuente: Problem of the Week- Bradley University- PROBLEM 246

Solución:

Este es un clavo que quiero sacarme hace mucho tiempo, hasta que encontré una solución muy coherente, me disculpan si ya tenían la respuesta, son esos problemas que a veces quedan atragantados, a ustedes les pasa ¿no?

$x^y = y^x$;

$y(\ln(x)=x.\ln(y)$

$$y\ln(x) = x\ln(\frac{y}{x}.x)$$

$$y\ln(x) = x.(\ln(\frac{y}{x}) + \ln(x))$$

$$\frac{y}{x}\ln(x) = \ln(\frac{y}{x}) + \ln(x)$$

$$\ln(x) = \frac{\ln(\frac{y}{x})}{\left(\frac{y}{x} - 1\right)}$$

$$x = \left(\frac{y}{x}\right)^{\left(\frac{y}{x}-1\right)}$$

De hecho por algebra:

Notamos que en la sexta y sétima ecuación, debemos excluir, $y \neq x$; y de hecho, $x = y$ es una solución obvia de la ecuación. Sea $a = y/x \neq 1$, entonces: $x = a^{\frac{1}{a-1}}$, $y = a^{\frac{a}{a-1}}$.

Es una solución paramétrica.

Solución: Philippe Fondanaiche, France; Bill Webb, USA; Farid Lian, Colombia; Ron Welch, USA. Traducción de Aldo Gil

---

Problema 8

Dos números de tres dígitos son tomados. La cifra de las centenas de cada uno de ellos es igual a la cifra de las unidades del otro. Encontrar estos números si su diferencia es 297 y la suma de los dígitos del menor es 23.

Fuente: Slovenian National Mathematical Olympiad 1999-Final round-1º Grade-Problema 1

Solución:

Aquí si me permito poner un aporte personal de solución, salvo error ú omisión dice así……

Podemos hacer las siguientes deducciones:

a) Sean los números $\overline{abc}$ y $\overline{cda}$, y si la diferencia es 297, y observamos que la suma de centenas y unidades es igual a las decenas (2+7=9), esto indica que irremediablemente *b=d* (¿por qué?).

b) Para que la diferencia sea positiva, *a>c*, y restando las unidades tenemos *10+c-a=7*, de donde deducimos que *a-c=3.*

c) Luego los valores serán *a*=9,8,…4 y para *c*=6,5,….1.

d) Además como la suma de los dígitos del menor es 23, tenemos que como *b=d=max(9),* por lo tanto *a+c*>14.

e) Los únicos valores que cumplen son 9 y 6, y por lo tanto *b*=8.

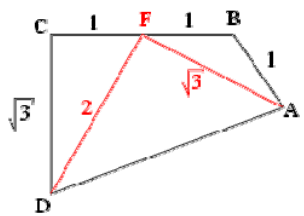
f) Los números son: 986 y 689.

Solución: Yo mismo soy Aldo Gil

Problema 9

En el cuadrilátero *ABCD*, *AB*=1, *BC*=2, $CD = \sqrt{3}$, ∠*ABC*=120º, y ∠*BCD*=90º. Hallar el valor de *AD*.

Fuente: Problems "C" in Setember, 2002-May 2003-Komal-Math-Hungria-Problem C.697



Solución

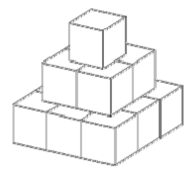
Sea *F* el punto medio del lado *BC*. Entonces el triángulo *ABF* es isósceles, e implica que ∡*BFA*=30° y $AF = \sqrt{3}$. Los catetos del triángulo rectángulo *FCD* son *FC*=1, y $CD = \sqrt{3}$, por lo que la hipotenusa es *FD*=2 y ∡*DFC*=60°. De aquí el ángulo ∡*D* del triángulo *AFD* es recto, y por el teorema de Pitágoras tenemos que: $AD^2=AF^2+FD^2=3+4$,. Luego el lado *AD* del cuadrilátero es $\sqrt{7}$.

Solución: Resuelto por los proponentes con traducción de Aldo Gil.

Problema 10

Matamos el arranque del año con esta perla.

Este problemita es muy lindo, yo me trate de complicar la vida con sumas y restas, pero la verdad la solución es muy ordenada y lógica. Muy bonito, muy académico y bueno para la pizarra…….



La "*pirámide*" de la figura es construida de tres niveles con cubos de 1 cm^3, siendo su superficie total de 42 cm^2. Usando la misma técnica, construimos una "*pirámide*" mas grande, con una superficie total de 2352 cm^2. ¿Cuántos niveles son necesarios?

Fuente: Problems "C" in Setember, 2002-May 2003-Komal-Math-Hungria-Problem C.681

Solución:

Sea *n* el número de niveles. Entonces la "*pirámide*" representa una superficie de $n^2\ cm^2$ cuando es vista por abajo o por arriba. Cuando es vista de un lado el área es: ($1+2+\ldots+n$), esto es $\frac{n(n+1)}{2}$ cm^2. De aquí la superficie total será:

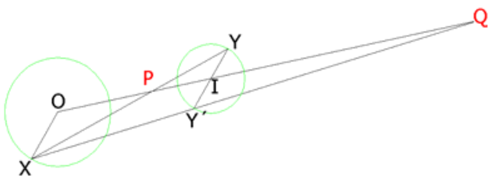
$2n^2 + 4.\frac{n(n+1)}{2} = 2352$, la cual simplificada queda como: $2n^2+n-1176=0$. Solo una de las raíces es positiva: $x=24$. De aquí la *pirámide* consta de 24 niveles.

Solución: Resuelto por los proponentes con traducción de Aldo Gil.

Esta propiedad la tomé del excelente libro Introduction to the Geometry of the Triangle, del profesor Paul Yiu La verdad que no tenía en mis apuntes esta propiedad, y puede a ayudar a resolver muchos problemas. Ojala les sea útil.

Centros de similitud de dos círculos.

Considerar dos círculos $O(R)$ e $I(r)$, cuyos centros O e I están a una distancia d. Tomamos un punto X en $O(R)$ y trazamos un rayo que pasa por I *opuestamente paralelo a* OX e intercepta el circulo $I(r)$ en Y. Siempre encontrarás que XY intercepta a la línea OI en el mismo punto P. A este punto lo llamamos *centro interno de similitud* de los dos círculos. Divide el segmento OI en la relación $OP: PI = R: r$. Las coordenadas baricéntricas absolutas de P con respecto a OI son: $P = \frac{R \cdot I + r \cdot O}{R+r}$.



Si por otro lado, construimos un rayo que pase por I directamente paralelo *al rayo OX* intercepta al círculo $I(r)$ en Y_1, la línea XY_1 siempre intercepta a OI en otro punto Q. Esta es el *centro externo de similitud* de los círculos. Divide al segmento OI en la relación $OQ : QI = R : -r$, y tenemos en las coordenadas absolutas baricéntricas: $Q = \frac{R \cdot I - r \cdot O}{R-r}$

Sabias que... Dadas las distancias de cualquier punto a los tres vértices de un triángulo equilátero a, b, y c, la longitud del lado s del triángulo viene dado por la fórmula:

$$3(a^4+b^4+c^4+s^4)=(a^2+b^2+c^2+s^2)^2$$

Joderrrr…. No me van a negar que arrancamos bien bacán el año…….Feliz 2007

Aldo Gil Crisóstomo