Y llegamos mis queridos amigos a nuestro número 30. El último del año, y por supuesto tenía pensado dedicarlo a todos ustedes pero con una larga y exclusiva sección Peruana. Creo que lo merezco, el esfuerzo ha sido grande pero la satisfacción por este trabajo ha sido mayor.

Sección Exclusivamente Peruana

Problema 1

Si a un número entero se le resta 631 resulta un cubo perfecto. Siendo 631 el mayor posible con esta propiedad. Hallar la suma de cifras del número dado.

Fuente: Universidad Nacional de Ingeniería – Lima Perú – Examen de Admisión 1985-I Aritmética y Algebra

Solución:

Sea N el número. Por dato $N\text{-}631=k^3$, como 631 es el mayor posible entonces k^3 es el menor posible, entonces k es lo menos posible.

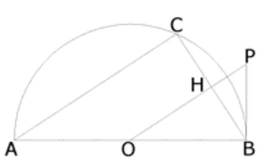
Si: $k=1 \Rightarrow N=631+1=632$ (no es respuesta)

Si: $k=2 \Rightarrow N=631+8=639$ (si hay respuesta)

$N=639 = 6+3+9 = 18$

Solución: Oficial de la Universidad recopilada por Aldo Gil.

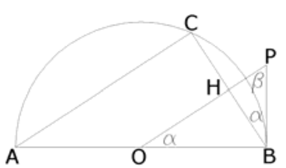
Problema 2



Dada una semicircunferencia de centro O de 10 centímetros de radio, se le inscribe un triángulo rectángulo cuyo cateto CB mide 8. En B se traza la tangente BP que encuentra en P a la perpendicular OH a la cuerda BC. Hallar la longitud de BP.

Fuente: Universidad Nacional de Ingeniería – Lima Perú – Examen de Admisión 1977 Geometría y Trigonometría

Solución



El ángulo β es común a los triángulos ABC y OHB, por lo tanto: $\alpha+\beta=90°$. $\triangle ACB \sim \triangle OPB$. En el $\triangle ACB$:

$AC=\sqrt{20^2-8^2}=4\sqrt{21}$.

Por lo tanto: $\dfrac{OB}{AC}=\dfrac{10}{4\sqrt{21}}=\dfrac{BP}{CB}$. De aquí: $BP=\dfrac{20\sqrt{21}}{21}$

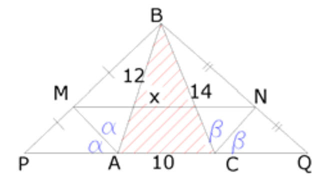
Solución: Oficial de la Universidad recopilada por Aldo Gil.

Problema 3

Los lados de un triángulo miden 10, 12 y 14. Se trazan dos bisectrices exteriores y desde el tercer vértice se trazan perpendiculares a estas bisectrices. Hallar el segmento que une los pies de las perpendiculares.

Fuente: Universidad Nacional de Ingeniería – Lima Perú – Examen de Admisión 1982-II Algebra-Geometría y Trigonometría

Solución:



Si prolongamos estas perpendiculares trazadas, se forman 2 triángulos isósceles, ya que notaremos que las bisectrices son también alturas. Luego M y N son puntos medios de AB y BQ.

Finalmente en el triángulo PBQ por el teorema de los puntos medios: $MN=\dfrac{PQ}{2}=\dfrac{36}{2}=18$

Solución: Oficial de la Universidad recopilada por Aldo Gil.

Problema 4

Un hombre decide repartir una herencia en forma proporcional al orden en que nacieron sus hijos. La herencia total es de 480,000; adicionalmente deja 160,000, para el mayor de tal modo que el primero y el último hijo reciban igual herencia. ¿Cuál es el mayor número de hijos que tiene este personaje?

Fuente: Universidad Nacional de Ingeniería – Lima Perú – Examen de Admisión 1981 Aritmética y Algebra

Solución

Sea:

	edades	orden
480,000	a	1
	b	2
	c	3
	.	.
	.	.
	.	.
	.	.
	x	n

Luego: $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{3}=\ldots=\dfrac{x}{n}=\dfrac{480{,}000}{\dfrac{n(n+1)}{2}}$ ....(I)

Por dato: $a+160{,}000=x$

En (I): $\dfrac{x-a}{n-1}=\dfrac{480{,}000}{n(n+1)} \Rightarrow \dfrac{160{,}000}{n-1}=\dfrac{480{,}000.2}{n(n+1)}$

$6(n\text{-}1)=n(n+1) \Rightarrow n=2$ ó 3. Por lo tanto el mayor número es 3.

Solución: Oficial de la Universidad recopilada por Aldo Gil.

Problema 5

Hallar un número de 4 cifras $\overline{abcd}$ que sea divisible por 13 y tal que $\overline{cd} = 3(\overline{ac} + 2)$.

Fuente: Universidad Nacional de Ingeniería – Lima Perú – Concurso de Admisión 2002-II

Solución

Dato: $\overline{abcd} = 13$............(I)

Además: $\overline{cd} = 3(\overline{ac} + 2) \Rightarrow \overline{cd} = 3\overline{ac} + 6$

Descomponiendo polinómicamente:

$10c+d=30a+3c+6$

$7c + d - 6 = 30a$

4	8	1
5	1	1
9	3	2

Reemplazando en (I):

$N_1=\overline{1b48} = m13 \Rightarrow -1-4b-12+8= m\ 13$

$\Rightarrow b=2 \Rightarrow 1248$

$N_2=\overline{1b51} = m13 \Rightarrow -1-4b-15+1= m\ 13$

$\Rightarrow b=6 \Rightarrow 1651$

$N_3=\overline{2b93} = m13 \Rightarrow -2-4b-27+3= m\ 13$

$\Rightarrow b=0 \Rightarrow 2093$

Solución: Oficial de la Universidad recopilada por Aldo Gil.

Problema 6

Se desea saber el mayor número de postulantes que puede haber en un aula sabiendo que si al doble del número de estos se le disminuye en 7, el resultado es mayor que 29 y que si al triple del número se le disminuye en 5 el resultado es menor que el doble del número aumentado en 16.

Fuente: Universidad Nacional de Ingeniería – Lima Perú – Concurso de Admisión 1971-Aritmética y Algebra.

Solución

Sea x el número de postulantes que hay en el aula. Por condiciones:

$2x-7 > 29$ ....(I)

$3x-5 > 2x+16$..................(II)

De (I): $x> 12$

De (II): $x<21$

Luego: $12 < x < 21$.

El mayor número de postulantes será $x=20$.

Solución: Oficial de la Universidad recopilada por Aldo Gil.

Problema 7

El número de alumnos de un colegio esta comprendido entre 500 y 1000. Si salen de paseo en grupos de 3 personas forman un número exacto de grupos y lo mismo sucede

si salen en grupos de 5. El colegio esta conformado por secciones del mismo número de alumnos. El número de secciones es igual al número de alumnos por sección. ¿Cuántos alumnos tiene le colegio?

Fuente: Universidad Nacional de Ingeniería – Lima Perú – Concurso de Admisión 1987-I Aritmética y Algebra.

Solución

Sea N el número de alumnos.

Por dato N es múltiplo de 3 y de 5.

También $N=k^2$ (cuadrado perfecto). Por tener el mismo número de aulas y el número de alumnos es igual al número de aulas. También: $500<N<1000$. Luego

entonces: $N=\overline{abc} = m15 = k^2 = 3.5.\underbrace{p}_{3.5.q^2}$

$N=3^2.5^2.q^2 \Rightarrow 500<3^2.5^2.q^2<1000$

$1,4<q<2,3 \Rightarrow q=2 \Rightarrow N=3^2.5^2.2^2=900$

Solución: Oficial de la Universidad recopilada por Aldo Gil.

Problema 8

Demostrar que en un triángulo si se cumple: $sen\frac{A}{2}.cos^3\frac{B}{2}=sen\frac{B}{2}.cos^3\frac{A}{2}$, entonces el triángulo es isósceles.

Fuente: Problemas de Trigonometría-Carlos Blossiers 1945-Lima-Perú

Solución:

Dividiendo los dos miembros de la igualdad por $cos\frac{A}{2}.cos\frac{B}{2}$, obtenemos:

$tan\frac{A}{2}.cos^2\frac{B}{2}=tan\frac{B}{2}.cos^2\frac{A}{2}$, ó bien

$tan\frac{A}{2}.\frac{1}{1+tan^2\frac{B}{2}}=tan\frac{B}{2}.\frac{1}{1+tan^2\frac{A}{2}}$, $tan^3\frac{A}{2}-tan^3\frac{B}{2}+tan\frac{A}{2}-tan\frac{B}{2}=0$, o aun: $(tan\frac{A}{2}-tan\frac{B}{2})(tan^2\frac{A}{2}+tan\frac{A}{2}.tan\frac{B}{2}+tan^2\frac{B}{2}+1=0$, y si observamos que el segundo factor del producto del primer miembro es un trinomio en $tan\frac{A}{2}$ *que no tiene raíz puesto que su discriminante es* $-3tan^2\frac{B}{2}-4$, *se tiene:* $tan\frac{A}{2}-tan\frac{B}{2}=0$; entonces, $\frac{A}{2}$ *y* $\frac{B}{2}$ siendo agudos, se tiene $\frac{A}{2}=\frac{B}{2}$, de donde $A=B$.

Solución: El autor y recopilado por Aldo Gil C.

Problema 9

Los tres lados de un triángulo tienen por medidas 2, $\sqrt{6}$, y $\sqrt{3}+1$; calcular los ángulos sin hacer usos de tablas.

Fuente: Problemas de Trigonometría-Carlos Blossiers 1945-Lima-Perú

Solución:

Evaluemos desde luego A, aplicando la formula $a^2=b^2+c^2-2b.c.\cos A$; tenemos:

$4=6+4+2\sqrt{3}-2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)\cos A$, de donde hallamos $\cos A=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}$; luego $A=45°$.

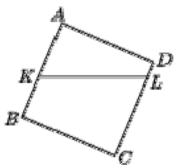
Calculemos B de la misma manera. Tenemos $b^2=c^2+a^2-2a.c.\cos B$, y reemplazando como en el caso anterior tenemos: $\cos B=\frac{1}{2}$, $B=60°$. Los ángulos del triángulo serán:

$A=45°$, $B=60°$ y $C=75°$.

Solución: El autor y recopilado por Aldo Gil C.

Problema 10

Para cerrar el año, si tengo problemas, pues la cosa debía ser espectacular o algo así, pero vamos a veces la cosa no esta como para ponernos exigentes, así que escogí uno hungaro, que nos ha traido satisfacciones en el año, y como lo resolví yo solito (uppps… espero que bien), pues lo puse.



Un recipiente cúbico de lado 12, esta lleno a los $\frac{5}{8}$ de su capacidad. El cubo es girado a través del eje perpendicular por C, tal como se muestra. Si la línea KL es la del nivel del liquido, y el cubo es detenido cuando LC es el doble de KB. Hallar LC.

Fuente: Komal Hungría, New Exercises and problems October 2004 – Problema K.9

Solución

Vamos a resolverlo por el razonamiento más sencillo y práctico. Desde que es un cubo de profundidad 12, para cualquier caso (para la posición inicial y final), podemos asumir que todo el problema se reduce a verificar el área inicial del cuadrado, e igualarla de tal forma que el área del trapecio BCLK sea la misma. *Listo!!!*

El área inicial será: 12 x 12 x $\frac{5}{8}$ = 90. Y el área del trapecio será: $\frac{(BK+LC).BC}{2}$.

Pero si $BK=x$, $LC=2x$ y el área es 90.

Tenemos: $90=\frac{(x+2x).12}{2}$, de donde $x=5$ y $LC=10$.

Comentario: Más que la parte operativa y el resultado, siempre es bueno la simplificada del asunto, tratando de "convertir", volúmenes en áreas para simplificar el problema.

Solución: Resuelto por Aldo Gil C, así que no necesitó traducir nada, porque lo resolví en castellano.

CORRETELA

Dejamos la corretela para el otro año, hay varias observaciones de mi amigo Bernardo Calero con relación al número 29, pero no me da el cuero para colocarlas (es por cansancio).

Bueno muchachos y muchachas (así no se me carga nadie), la verdad es que no les voy a negar que me siento orgulloso de mi trabajo, pueden creer que hace un par de semanas, acabo de imprimir todos los números, y me encuentro cada error (horror!!!), como problemas repetidos, y errores de ortografía y algunas incoherencias, pero también me di cuenta que a medida que avanzamos se ha ido mejorando, no como para decir que bruto, que genial este cuate, pero allí vamos.

En estas fiestas navideñas que la felicidad sea reflejada por saber que algo crecimos espiritualmente, profesionalmente, amorosamente y cualquier otra mente que caiga por allí, para mi el hombre (o mujer) que crece es cada día mejor, es mas útil para la humanidad, mis mejores deseos es que piensen que otro mundo es posible, que tenemos derecho TODOS los seres humanos a compartir la belleza de un mundo mejor, que las cosas no sean expropiadas por los que se crean con derecho a hacerlo porque tiene las armas para pisotear a los demás, usando los países como patios traseros.

Este año acaba con un criminal menos en este mundo y espero que así vayan desapareciendo uno a uno para irnos librando del mal.

El nuevo año debe ser blanco, brillante y radiante con un aire mas respirable, y con la esperanza que sigamos creciendo para mejor.

A sus familias un sincero abrazo.

Y perdonen la perorata…………

Sinceramente,

Aldo Gil Crisóstomo