Problema 1

Cuantas soluciones tiene la criptosuma *UNO* + *DOS* = *CERO* si se considera base 8 (ocho).

Fuente: Propuesto por David Jiménez

Solución

En base 8, lo primero que deducimos al igual que en las otras bases que *S*=0 y *C*=1 pero además la *U* y la *D* son permutables.

Luego empezamos probando, para la *O*=7

$\overline{UN7}+\overline{D70}=\overline{1ER7}$, la N no puede ser 1,2 ni 0, si es 3 R=2 y luego nos queda 4,5 y 6 con lo que podemos formar 537+670=637+570=1427 van 2 soluciones

Si la N=4 R=3 quedan 6,5 y 2 no hay solución

si la N=5 R=4 quedan 6,3 y 2 de allí surgen otras 2 soluciones

657+370=357+670=1247

si la N=6 R=5 quedan 2,3 y 4 no hay solución

Para la O=6

$\overline{UN6}+\overline{D60}=\overline{1ER6}$, otra vez N no puede ser 1,2 ni 0 ni 3

si N=4 R=2 quedan 5,3 y 7 no hay solución

si N=5 R=3 quedan 4,2 y7 no hay solución

si N=7 R=5 quedan 2,3 y 4 no hay solución

Para la O=5

$\overline{UN5}+\overline{D50}=\overline{1ER5}$, N no pude ser 0,1,3 ni 4

Si N=2 R=7 quedan 3,4 y 6 no hay solución

Si N=6 R=3 quedan 2,4 y 7 no hay solución

si N=7 R=4 quedan 3,6 y 2 lo cual nos da 2 soluciones más

675+350=375+650=1245

Para la O=4

$\overline{UN4}+\overline{D40}=\overline{1ER4}$, la N no puede ser 0,1,4 ni 5

para N=2 R=6 quedan 3,5 y 7 no hay solución

para N=3 R=7 quedan 2,5 y 6 no hay solución

para N=7 R=3 quedan 2,5 y 6 no hay solución

para la O=3

$\overline{UN3}+\overline{D30}=\overline{1ER3}$, N no puede ser 0,1,5 ni 6.

Para N=2 R=5 quedan 4,6 y 7 no hay solución.

Para N=4 R=7 quedan 2,5 y 6 no hay solución

para N=7 R=2 quedan 2,4 y 5 tenemos 2 soluciones

573+630=673+530=1423

para la O=2

$\overline{UN2}+\overline{D20}=\overline{1ER2}$, N no puede ser 0,1,2 y 6 ni 7

Si N=3 R=5 quedan 4,6 y 7 no hay solución

Si N=4 R=6 quedan 3,5 y 7 no hay solución

Si N=5 R=7 quedan 3,4 y 6 no hay solución

Lo bueno de la base 8 es que se usan los 8 dígitos posibles y no se necesitan tantos cálculos. Hay pues 8 soluciones

573+630=1423
673+530=1423
675+350=1245
375+650=1245
657+370=1247
357+670=1247
637+570=1427
537+670=1427

Solución: Pablo Adrián Sussi

Problema 2

Explique por que la criptosuma *UNO* + *DOS* = *TRES* no tiene ninguna solución.

Fuente: Propuesto por David Jiménez

Solución

Porque *O* debe valer cero por las unidades de la suma, y por lo tanto *N* = *E* por las decenas.

Solución: Daniel Ricardo Suárez

Problema 3

Natasha es supersticiosa, al numerar las 200 páginas de su diario, comenzó del 1, mas excluyo aquellos números donde las cifras 1 y 3 aparecían juntas en cualquier orden. Por ejemplo, los números 31 y 137 no aparecen en el diario, pero el 103 si aparece. ¿Cuál fue el número que escribió en la última página de su diario?

Fuente: Propuesto por Aldo Gil

Solución

Va excluyendo el 13, 31, 113, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, y 139, en total son 13 números, es decir que al llegar al 200 le faltarían 13, llegaría hasta el 213, pero este también se excluye por lo tanto, la última página es el 214.

Solución: Pablo Adrián Sussi

Problema 4

Considere tres números enteros positivos consecutivos de tres cifras tales que el menor es múltiplo de 7, el siguiente es múltiplo de 9 y el mayor es múltiplo de 11. Escriba todas las secuencias de números que satisfacen esas propiedades.

Fuente: Propuesto por Aldo Gil

Solución

Un número es divisible por 11 si la diferencia entre la suma de los dígitos que ocupan posiciones pares y la suma de los que ocupan posiciones impares es 0 ó múltiplo de 11.

Por lo tanto si es posible que sus cifras sumen 19 para dejar al anterior en 18 y que sea múltiplo de 9

Para ello en un número de 3 cifras la cifra del medio solo puede ser 4, sumando 15 las cifras de los extremos.

Por lo tanto a los casos anteriores se sumarían el 649,748,847,y,946, que dejan el 648, 747, 846 y 945 como múltiplos de 9, pero en ninguno de los 4 casos el anterior es múltiplo de 7, ya que para que eso ocurra el número formado por las 2 primeras cifras, menos el doble de las unidades debe ser múltiplo de 7 y en ningún caso lo es. Resumiendo todos los mensajes.

Sólo se dan múltiplos de 11 que el anterior sea 9 en los siguientes casos

154, 253, 352, 451, 550, 649, 748, 847 y 946; los de 9 serían 153, 252, 351, 450, 549, 648, 747, 846, y 945; probamos en todos los casos la divisibilidad por 7 del anterior y nos da:

152 = 15-4= 11 no 251 = 25-2= 23 no
350= 35-0= 35 si 449= 44-18=26 no
548= 54-16=38 no 647= 64-14=50 no
746= 74-12=62 no 845= 84-10=74 no
944= 94-8 =86 no

Por lo tanto el único trío que encaja es 350, 351 y 352

Solución: Pablo Adrián Sussi

Problema 5

Demostrar que la suma $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ donde n es un entero arbitrario y k es impar, es divisible por $1+2+3+\ldots+n$.

Fuente: USSR Olympiad problemas D.O. Shklarsky-Problema 35 Página 14

Solución

La verdad es que este problema esta demasiado bonito para dejarlo pasar. La demostración sale después de una serie de consideraciones.

1.- O los rusos son muy inteligentes o los que les proponen los problemas en las olimpiadas son unos grandes … (no sean malpensados!!!)

2.- Nótese que $1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$. Por lo tanto habrá que demostrar que la bendita suma con las horribles "k" será divisible por n y $(n+1)/2$ o $(n+1)$ y $n/2$ según n sea impar o par, respectivamente.

3.- Para cada i, el polinomio $P(i,n) = i^k + (n-i+1)^k$ es divisible por $n+1$.

Demostración: Esto sigue del hecho siguiente: $P(i,-1) = i^k + (-1-i+1)^k = i^k + (-i)^k = 0$ ya que k es impar. (Teorema del Residuo o del Resto, no recuerdo como se llama)

4.- Si n es par, entonces $S=1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ es divisible por n+1.

Demostración: la suma S se puede rescribir como:

$S = (1^k+n^k)+(2^k+(n-1)^k)+(3^k+\ldots+(n-2)^k)+\ldots$

$S = sum(P(i,n), i=1 \ldots n/2)$

Y como cada sumando es divisible por $n+1$ la suma S también lo será.

5.- Si n es impar, entonces $S=1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ es divisible por $(n+1)/2$

Demostración: Aquí aplicamos el viejo truquito que nos dejo locos la primera vez que lo vimos. Sumando las dos expresiones

$S = 1^k+2^k+\ldots+(n-1)^k+n^k$

$S = n^k+(n-1)^k+\ldots+2^k+1^k$

Obtenemos que: $S = (1/2)\ sum(P(i,n), i=1\ldots n)$

Y siendo que cada término en la suma es divisible por $n+1$, la suma S termina siendo divisible por $(n+1)/2$

6.- Si n es impar, entonces $S=1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ es divisible por n.

Demostración: la suma S se puede escribir:

$S=1^k+2^k+3^k+\ldots+(n-1)^k+n^k$

Ya que $n-1$ es par, es una consecuencia de (4) que $1^k+2^k+3^k+\ldots+(n-1)^k$ es divisible por $(n-1)+1 = n$

Finalmente $S = [1^k+2^k+3^k+\ldots+(n-1)^k] + n^k$ es entonces la suma de dos múltiplos de n.

7.- Si n es par, entonces $S=1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ es divisible por $n/2$

Demostración: … sigue después de un poquito de manipulación como en (6)

En resumen, hemos demostrado que la suma S es divisible por n y $(n+1)/2$ o $(n+1)$ y $n/2$ según n sea impar o par, respectivamente.

Solución: John Abreu

Problema 6

Tres comerciantes fueron a vender mercancías. Uno lleva 10; otro 16; y el tercero, 26. Todos venden algunas mercancías por el mismo precio antes del mediodía. Después de eso, los tres bajaron el precio, pero continuaron vendiendo a precios iguales. Cuando vuelven a casa, luego de vender toda la mercancía, cada uno tiene 35,000 cruzeiros. ¿A cuanto fue vendida cada mercancía antes y después del mediodía?

Fuente: Propuesto por Aldo

Solución

Sean A_1, A_2 y A_3 los vendedores que venderán 10, 16 y 26 mercancías respectivamente, x_i la cantidad de mercancías que el vendedor A_i vende antes del medio día e y el precio antes del medio día e y_1 el precio después del medio día.

Por lo tanto, tenemos:

$$\begin{cases} I) \ y\cdot x_1 + (10 - x_1)y_1 = 35000 \\ II) \ y\cdot x_2 + (16 - x_2)\cdot y_1 = 35000 \\ III) \ y\cdot x_3 + (26 - x_3)\cdot y_1 = 35000 \end{cases}$$

De I) y II)

$\Rightarrow y\cdot(x_1) + (10 - x_1)y_1 = y\cdot x_2 + (16 - x_2)y_1 \Rightarrow y(x_1 - x_2) = (6 + x_1 - x_2)y_1$ Análogamente de II), III) e I), III) tenemos $y(x_1 - x_3) = (16 + x_1 - x_3)y_1$ e $y(x_2 - x_3) = (10 + x_2 - x_3)\cdot y_1$

De aquí: $\left| \begin{matrix} x_1 - x_2 = w_1 \\ x_1 - x_3 = w_2 \\ x_2 - x_3 = w_3 \end{matrix} \right. \Rightarrow \left| \begin{matrix} y\cdot w_1 = (6 + w_1)\cdot y_1 \\ y\cdot w_2 = (16 + w_2)\cdot y_1 \\ y\cdot w_3 = (10 + w_3)\cdot y_1 \end{matrix} \right. \Rightarrow$

$$\frac{y\cdot w_1}{y\cdot w_2} = \frac{(6 + w_1)\cdot y_1}{(16 + w_2)\cdot y_1} \Rightarrow \frac{16 + w_2}{w_2} = \frac{6 + w_1}{w_1} \Rightarrow \frac{16}{w_2} + \frac{w_2}{w_2} \Rightarrow \frac{6}{w_1} + \frac{w_1}{w_1} \Rightarrow$$

$\frac{16}{w_2} = \frac{6}{w_1} \Rightarrow \frac{8}{w_2} = \frac{3}{w_1}$; Imagine, ahora, esas dos fracciones en sus formas irreductibles y como sus numeradores deberán ser iguales, el número 8 no tienen el factor "3" entonces w_1 es múltiplo de "3" $\Rightarrow$ $w_1 = 3k$ (con $k \in$ N) si $k \neq 1 \Rightarrow w_1 \geq 6 \Rightarrow w_2 \geq 16$ (Absurdo! pues $w_2 = x_1 - x_2 < 10$, pues $x_1 < 10$) luego k = 1 y $w_1 = 3 \Rightarrow w_2 = 8$ e $w_3 = 5$. Como todos los vendedores venderán algunas mercancías antes y después del medio día tenemos que $1 \leq x_1 \leq 9$ y $1 \leq x_3 \leq 25$ más $w_3 = x_1 - x_3 = 8 \Rightarrow x_3 = 1$ y $x_1 = 9 \Rightarrow x_2 = 6$.

Luego: $y\cdot w_1 = (6 + w_1)\cdot y_1 \Rightarrow y = 3\cdot y_1$ y así sustituyendo en I) tenemos:

$3y_1\cdot x_1 + (10 - 9)\cdot y_1 = 35000 \Rightarrow 28y_1 = 35000 \Rightarrow y_1 = 1250$ cruzeiros y y = 3750 cruzeiros.

Problema 7

Demostrar que el producto de cuatro enteros consecutivos incrementados en una unidad es un cuadrado perfecto.

Fuente: Propuesto por Robert A. Carman

Solución

Sea N el número menor, luego tenemos:

$(n)(n+1)(n+2)(n+3)$

$= (n^2++n)(n^2+5n+6)$

$= n^4+6n^3+11n^2+6n$

$= (n^2+3n+1)^2-1$

Luego es obvio que al agregar una unidad el número se convierte en cuadrado perfecto.

Solución: Sheng-Ping con traducción de Aldo Gil

Problema 8

La edad de Aldo es igual a la de Bernardo más la raíz cúbica de la edad de Carlos, la edad de Bernardo es igual a la de Carlos más la raíz cúbica de la edad de Aldo más 14 años, y la edad de Carlos es igual a la raíz cúbica de la edad de Aldo más la raíz cuadrada de la edad de Bernardo. Hallar las tres edades.

Fuente: The American Mathematical Monthly

Solución

Para empezar $A>B>C$

Aparte A debe ser un cubo, al igual que C y B un cuadrado

$A= B+\sqrt[3]{C}$

$B=C+\sqrt[3]{A}+14$

$C=\sqrt[3]{A}+\sqrt{B}$

Empecemos por B que tiene que ser un cuadrado, pero vemos que tiene que ser un número mayor que C en 14 y $\sqrt[3]{A}$, por lo tanto tiene que ser por lo menos 25. A es un cubo mayor que B, por lo menos debe ser 27. Existen soluciones para este par de números, veamos:

$C= \sqrt[3]{27}+\sqrt{25} = 3+5=8$

$B=8+3+14=25$

$A=25+2=27$, perfecto

Ahora bien podría existir alguno más?

De las primeras fórmulas podemos deducir

$A=C+\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{C}+14$

O lo que es lo mismo

$(A-\sqrt[3]{A})-(C+\sqrt[3]{C})=14$

Esto sólo se cumple para A=27 y C=8

(27-3)-(8+2)=14

24-10=14

A partir de ahí a medida que A crece, ningún cubo menor cumple con esta igualdad, lo que probamos con A=64 y C=27

(64-4)-(27+3)=60-30=30 y no 14

y dicha ecuación es creciente a medida que crece A, vemos con A=125 y C=64

(125-5)-(64+4)=120-68=52 y no 14

Por lo tanto la única solución es: Aldo 27; Bernardo 25; Carlos 8

Solución: Pablo Adrián Sussi

Problema 9

Inspirado en el problema de Aldo, con Aldo, Bernardo y Carlos:

La edad de Aldo es la diferencia de las raíces cuadradas de las edades de los otros dos.

La edad de Bernardo es la suma de los cuadrados de las edades de los otros dos.

La edad de Carlos es la diferencia entre el cuadrado de la edad de uno de los otros dos y la raíz cuadrada de la edad del tercero.

Hallar las tres edades.

Fuente: Propuesto por Jesús Sanz

Solución

$B=A^2+C^2$ con lo cual B es el mayor, luego $A=\sqrt{B}-\sqrt{C}$

$C=B^2-\sqrt{A}$ ó $A^2-\sqrt{B}$ parece más probable esta última.

Ahora bien B es un cuadrado que es a su vez la suma de 2 cuadrados....

Tenemos 9+16=25 y 36+64=100

En el primer caso tenemos que A y C valen 3 y 4 pero no se sabe cual es cual; luego vemos que encaja perfectamente que $A=\sqrt{B}-\sqrt{C}$ =5-2=3; quedaría entonces C=4

Probamos con $C= A^2-\sqrt{B}$ = 9-5=4 con lo cual el problema está resuelto

Aldo 3, Bernardo 5, Carlos 4

En el otro caso tenemos una inconsistencia ya que A y c deberían ser 8 y 6 y no nos dan las otras ecuaciones.

Solución: Pablo Adrián Sussi

Problema 10

Supongamos que $p(x) = [\sqrt[3]{x}]$ (Léase, la parte entera de la raíz cúbica de x). Encuentre los valores de n para los cuales la siguiente igualdad se cumple:

$p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+...+p(n)=2n$.

Fuente: Propuesto por David Jiménez

Solución

Cuando n aumenta en 1, el segundo miembro aumente en 2 siempre. En cuanto al primer miembro, para n mayor o igual que 8 aumenta al menos en 2.

Por lo tanto a partir de 8 el primer miembro aumenta al menos tan rápidamente como el segundo y a partir de 27 desde luego más rápidamente. Por tanto, la diferencia $p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+...+p(n)-2n$ es no decreciente a partir de 8 y estrictamente creciente a partir de 27.

Como $p(n)$ = 1 para n = 1..7, $p(n)$ = 2 para n = 8..26 y $p(n)$ = 3 para n = 27..63, tenemos que: $p(1) + ..+p(27)$ = 7*1 + 19*2 + 3 = 48 < 54.

A partir de aquí, por cada unidad que aumente n el primer miembro aumenta en 3 y el segundo en 2, por lo que necesitaremos 6 más para que se igualen. En efecto: $p(1) + ..+p(33)$ = 7*1 + 19*2 + 7*3 = 66 = 2*33

Por tanto, la igualdad solo es cierta para n = 33.

Solución: Ignacio Larrosa Cañestro

Solución 2

La parte entera de la raíz cúbica de 1 a 7 es =1. La suma de todas es 7 de 8 a 26 es igual a 2. Son 19 números o sea suman 38.

Evidentemente nos faltan 7 para promediar 2, con lo que necesitamos 7 números más que van a tener raíz cúbica 3, son del 27 al 33.

7+38+21=66 el doble de 33.

De ahí en adelante, siempre suman más de 2 y siempre van a dar la sumatoria más de 2n.

Solución: Pablo Adrián Sussi