Empezamos la sección Peruana con algo de logaritmos

Sección Peruana

Problema 1

Hallar el valor de b que satisface la siguiente igualdad: $log_b \sqrt[4]{125} = \frac{3}{2}$.

Fuente: Universidad Nacional de Ingeniería – Lima Perú – Examen de Admisión 1981-I-Aritmética y Algebra

Solución:

Por definición: $log_b \sqrt[4]{125} = \frac{3}{2} \Rightarrow b^{\frac{3}{2}} = 125^{\frac{1}{4}}$.

Mejor aun: $b^{\frac{3}{2}} = (5^{\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}$.

Identificando: $b = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

Solución: Oficial de la Universidad recopilada por Aldo Gil.

A continuación, dos problemas que llegaron por la lista, es muy interesante cuando se plantean dudas puntuales sobre temas puntuales, que a muchos de nosotros nos parecen triviales, pero siempre hay una solución mas sencilla, o controversial, o imaginativa, o académica, pero me parece que eso es lo bueno que nos ofrece la Internet (patrimonio del mundo), encontrar opiniones sobre un mismo tema de diversas partes del mundo con personajes, idiomas, mentalidades distintas, pero con el mismo pensamiento, la pasión por los números. Como no se trata de ser poeta, sino matemático (¿se contraponen?), allí vamos..

Problema 2

Hola a todos: mi duda es la siguiente, en el ejercicio del curso de ingreso a la facultad preguntan lo siguiente: sea α tal que sen $\alpha = -\frac{2}{5}$ calcular en forma exacta, sin hallar α los valores de cos α y cot α. ¿Como puedo hacer para resolverlo sin hallar el valor del ángulo? Perdonen si la pregunta es muy tonta es que son temas que nunca di en los tres años de polimodal.

Fuente: Propuesto por Antonela–Argentina- Examen ingreso Facultad de ciencias exactas de la Plata – 6-12-06

Solución 1:

Recordando la fórmula fundamental de la trigonometría:

$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$, tenemos que cos

$\alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2 \alpha} = \pm\sqrt{1-(-\frac{2}{5})^2}$

$= \pm\sqrt{1-\frac{4}{25}} = \pm\sqrt{\frac{21}{25}}$. Pero sin saber algún dato más, como el cuadrante al que pertenece α, por ejemplo, no podremos precisar si el signo debe ser positivo o negativo. Para la *cot* ya es inmediato, no hay más que dividir el coseno por el seno, y nos queda: cot $\alpha = \pm\sqrt{\frac{21}{2}}$, (con el signo contrario al que hubiésemos tomado para el *coseno*, puesto que el seno es negativo)

Solución: Resuelto por Ignacio Larrosa Cañestro - A Coruña (España)

Solución 2:

Como *sen* α = -2/5, α pertenece al tercer ó cuarto cuadrante. Puedes construir un triángulo rectángulo con cateto opuesto al ángulo α igual a 2 e hipotenusa igual a 5; mediante el teorema de Pitágoras se halla el valor de $\sqrt{21}$ para el cateto adyacente.

Por lo que cos $\alpha = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}$ (negativo en el tercer cuadrante, positivo en el cuarto). Y cot $\alpha = \pm\frac{\sqrt{21}}{2}$, (positivo en el tercer cuadrante y negativo en el cuarto).

Solución: Resuelto por Juan Beltrán

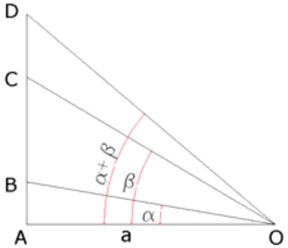
Problema 3

Solicito ayuda con este problema:

Un edificio de 10 pisos, cada piso de 3 m de altura, está ubicado al borde de una avenida. Desde un punto de la orilla opuesta de la avenida, al mismo nivel del pie del edificio, el ángulo subtendido por los 3 pisos superiores es igual al ángulo subtendido por los 2 pisos inferiores. Calcular el ancho de la avenida.

Fuente: Propuesto por Pablogc – Lista Matracas 06 Diciembre 2006

Solución:



En la figura: *AB* = *6* y *AC* = *21* y *AD* = *30* metros.

En el triángulo rectángulo *OAB*: tg $\alpha = \frac{6}{a}$

Desde el observador trazamos la visual *OC*. Obtenemos el triángulo *OAC*, y llamamos β al ángulo que forman las visuales *OA* con *OC*. Luego tg $\beta = \frac{21}{a}$.

Desde el observador trazamos la visual *OD* y obtenemos el triángulo *OAD*, y el ángulo que forman las visuales *OA* con *OD*, por las condiciones del problema es $\alpha + \beta$. Luego tg $(\alpha + \beta) = \frac{30}{a}$. Pero tg $(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha . tg\beta}$

Luego: $\frac{30}{a} = \frac{\frac{6}{a} + \frac{21}{a}}{1 - \frac{6}{a} . \frac{21}{a}} \Rightarrow \frac{30}{a} = \frac{\frac{27}{a}}{1 - \frac{126}{a^2}}$

$\Rightarrow \frac{30}{a} = \frac{27a}{a^2 - 126}$, y resolviendo:

$a = \sqrt{1260} \cong 35.5$ metros

Solución: Resuelto por Elisenda Font-Barcelona (España)- con edición y dibujo de Aldo Gil

---

<u>*Problema 4*</u>

La suma de los cuadrados de 17 números primos positivos diferentes es un cuadrado perfecto. Demuestre que la diferencia entre los cuadrados de los dos números más grandes es divisible por el más pequeño.

Fuente: Komal Hungria, Solutions for problems "B" in September, 2000-Problema B.3382-by A. Gyurcsek, Veszprém,

---

<u>Solución</u>

Dividiendo un cuadrado perfecto por 3, el resto es 0 ó 1. Así, si la suma de 17 cuadrados perfectos es otro cuadrado perfecto, entonces uno de los términos es divisible por 3. Esto implica que uno de los 17 números primos es 3, y el más pequeño es 2 ó 3. Los dos primos más grandes no son divisibles por 2 ó 3; ellos son congruentes con 1 modulo 6. Así, la diferencia entre los cuadrados de los dos números más grandes es divisible por 2 y 3.

Solución: Resuelto por los proponentes de la prueba, traducción de Aldo Gil C.

<u>*Problema 5*</u>

Sea $f(x)=x^3-3x^2+ax+1$. ¿Cuáles son las tres raíces de esta función, sabiendo que las mismas están en progresión aritmética?

Fuente: Revista Olimpiada Regional de Santa Catarina-Brasil-2006-Propuesto por Andrzej Solecki,UFSC .

<u>Solución</u>

Representamos las 3 raíces en progresión aritmética: $x-r$, x, $x+r$.

Utilizando la relación de Girard:

tenemos: $x-r+x+x+r = \frac{-b}{1}$, donde $b= -3 \Rightarrow x-r+x+x+r=-b \Rightarrow 3x = \frac{-3}{1} \Rightarrow x = 1$.

Substituyendo el valor de la incógnita *x* en la ecuación, encontraremos el valor de a: $x^3-3x^2+ax+1= 0 \Rightarrow 1^3-3(1)^2+a(1)+1 =0 \Rightarrow 1 -3+a+1= 0 \Rightarrow -1+a =0 \Rightarrow a =1$.

Para el polinomio original hacemos: $x =1 \Rightarrow x-1 =0$. Con esto bajaremos el grado del polinomio.

Por el método tradicional ó por el método de Ruffini, obtenemos: x^2-2x-1).(x-1)=0

Resolviendo esta ecuación bicuadrada, obtenemos: $x_1 = 1+\sqrt{2}$ y $x_2 = 1-\sqrt{2}$.

Solución: Resuelto por Vilmar Minella Junior-Areglo y traducción de Aldo Gil

---

<u>*Problema 6*</u>

Este si es una joyita, mas por el problema en si, por la fecha (¡1894!), y por si no lo saben esta es la primera Olimpiada matemática oficial de la que se tenga conocimiento, así que alucinen pescar esta inocencia, creo que es un buen hallazgo.

Un triángulo tiene la longitud de los lados *a, a + d, a + 2d* y área *S*. Encontrar sus lados y ángulos en términos de *d* y *S*. Hallar las respuestas numéricas para *d* = 1, *S* = 6.

Fuente: 1st Eötvös Competición 1894- Problema 3

<u>Solución</u>

Es más conveniente usar $b = a+d$. Entonces por Herón:

$S^2 = \frac{3b^2}{4} . \left(\frac{b^2}{4} - d^2\right)$. Esta es cuadrática en b^2. Necesitamos una solución positiva, para que,

$b^2 = 2\left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4S^2}{3}}\right)$. Eso da los lados *a, b, c = b+d*.

Ahora $\sin A = \frac{2S}{bc}$, y $\sin B = \frac{2S}{ac}$. Desde que *c* es el mayor lado, *A* y *B* deben ser agudos. Finalmente, $C = 180^o - A - B$.

Para $d=1$, $S=6$, encontramos $b=4$. De aquí $a=3$, $c=5$, $A=\sin^{-1}(3/5)$.

Reconocemos el triángulo, tal que $C = 90^o$, $B = 90^o - A$

Solución: Respuesta oficial y traducción de Aldo Gil

Problema 7

Encontrar los pares positivos enteros de (x, y) de la ecuación $x^2 = y^2 + 31$.

Fuente: 7th Polya Mathematics Competition 30 October 1999-Problema 2

Solución

Reacomodando tenemos $x^2 - y^2 = 31$, esto es $(x - y)(x + y) = 31$. De aquí obtenemos que x e y son positivos, $x + y$ también lo es, así $x - y = 1$ y $x + y = 31$, con lo cual $(16, 15)$ es la única solución.

Solución: Respuesta oficial y traducción de Aldo Gil C.

Problema 8

Vamos que andamos prendidos de los logaritmos, pero me parece bonito…

(**a**) Hallar la solución (es) de $(\ln y)^2 - 2\ln(y^5) = 11$.

(**b**) Encontrar la derivada de la ecuación con respecto a y

Fuente: Problema · 20: 2002-2003 – Logarithmic Equations

Solución:

(**a**) Empezamos usando propiedades de logaritmos y reescribimos la ecuación. Entonces factorizamos y resolvemos en y.

$(\ln y)^2 - 2.5 \ln y = 11$

$(\ln y)^2 - 10 \ln y - 11 = 0$

$(\ln y - 11)(\ln y + 11) = 0$

$\ln y = 11$ ó $\ln y = -1$

$y = e^{11}$ ó $y = \dfrac{1}{e}$

(**b**) De acuerdo a la regla de cadena:

$2(\ln y).\dfrac{1}{y} - 2.\dfrac{1}{y^5}.5y^4 = 0$

$$\frac{2\ln y}{y} - \frac{10}{y} = 0.$$

Solución: Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil

Problema 9

Este problemita tiene una solución medido sosa, pero bastante curiosa, no encontré otro igual y me estaba haciendo problemas con las variables y los coeficientes, pero luego vi la solución, vale la pena….

Definimos $f(x)=ax^7+bx^5+cx-5$. Si $f(-7)=7$,

¿Cuanto vale $f(7)$?

Fuente: 8th Polya Mathematics Competition 28 October 2000-Problema 3

Solución:

$g(x)= f(x)+5$ es una función impar, y $g(-7)=12$, de aquí $g(7) = -12$ y por lo tanto $f(7) = -17$.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil

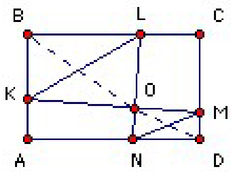
Problema 10

Cerramos con un problema de la tierra del vodka…..

$ABCD$ es un rectángulo. Los puntos K, L, M, N son tomados en AB, BC, CD, DA respectivamente de tal forma que KL es paralela a MN, y KM es perpendicular a LN. Demostrar que la intersección de KM y LN están en BD.

Fuente: 25th ASU 1991 problems- Rusia- problema 6

Solución:



Sea LN y KM que se cortan en O. $\angle NOM = \angle NDM = 90°$, por lo tanto $OMDN$ es cíclico. De aquí $\angle NOD = \angle NMD$. De igual forma, BLOK es cíclico y $\angle LOB = \angle LKB$. Pero NM es paralela a LK y AB es paralela a CD, por lo que $\angle LKB = \angle NMD$. De aquí $\angle NOD = \angle LOB$, y por lo tanto DOB es una línea recta.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil

CORRETELA

Nota 1.

En el número anterior (28), se planteo un problema y, bueno tuvo la corrección que ponemos literalmente, no dejando de agradecer a Diana por su valioso aporte, estas cositas son las que engrandecen nuestra (mía y de ustedes) revistita.

Hola Aldo, no lo he leído con detenimiento todavía, pero he visto algo que no se puede considerar correcto, en cuanto a su expresión. Te comento:

Problema 7: (fascículo 28)

"Encontrar el residuo cuando $(x^{12} + 1)$ es dividido entre $(x-1)$"

Tu respondes lo siguiente: "el residuo de dividir por $(x-1)$ es lo mismo que si el dividendo toma su raíz $x=1$"

Y eso es una incoherencia porque, por definición de raíz de un polinomio, si el dividendo toma su raíz $x=1$, el residuo de dividir entre $(x-1)$ sería *CERO*.

Deberías haberlo expresado diciendo: "el residuo de dividir por (x-1) es lo mismo que si el dividendo se evalúa en $x=1$"

Puedes argumentar utilizando el **teorema del resto**, que afirma lo siguiente:

"El residuo de dividir un polinomio *P(x)* entre el factor *(x-a)* coincide con el valor numérico del polinomio *P(x)* en $x=a$, es decir: $R=P(a)$"

Aplicando el teorema anterior a: $P(x)=(x^{12}+1)$

a=1

$R=$ Residuo de $\dfrac{x^{12}+1}{x-1} \Rightarrow R=P(1)=1^{12}+1=1+1=2$

Si no se conoce el teorema anterior, puede hacerse también con tan sólo conocer el ***algoritmo de la división de Euclides***:

"Dado *P(x)* y *Q(x)* dos polinomios -dividendo y divisor, respectivamente - existen dos únicos polinomios, *C(x)* y *R(x)* -cociente y resto, respectivamente, verificando:

$P(x)=Q(x)\cdot C(x)+R(x)$ con grado de *R* estrictamente igual que grado de *Q*"

Tomando: $P(x)=(x^{12}+1)$ y $Q(x)=(x-1)$; como el grado de *Q* es 1 $\Rightarrow$ El grado de *R(x)* debe ser cero, luego es un polinomio constante: $R(x)=R$ (residuo pedido).

Por lo tanto, existe un único polinomio *C(x)* -llamado cociente- y una constante *R* - llamada residuo- verificando:

$(x^{12}+1)=(x-1)\cdot C(x)+R$ para cualquier valor de *x*.

Evaluando la expresión anterior en $x=1$, tenemos el resultado pedido:

$1+1=(1-1)\cdot C(1)+R \Rightarrow 2+0\cdot C(1)=R \Rightarrow R=2$

Aporte: Mi amiga Diana Barredo Blanco

Nota 2.

Otro excelente aporte de Bernardo, gracias a ti por tu nota

Aldo

Estimado Aldo,

Muchas gracias por prestarnos tu tiempo a modo de documento. Sólo comentarte que lo he leído a grandes rasgos y luego lo imprimiré para echarle un vistazo más detenidamente. Pero en el problema 9 (fascículo 28), podrías comentar que lo de las ecuaciones *abc* es el término independiente, junto con el término en *x* que es $ab+ac+bc$, siendo *a,b,c* las raíces de la ecuación de tercer grado, no son más que las ecuaciones de Cardano-Vietta. Por lo demás ya te iré comentando.

Un abrazo,

Aporte: Mi amigo Bernardo Calero Primo- El Paraíso de las Matemáticas

Hasta aquí llegamos con nuestro número 29, creo que con suerte cerramos el año con el 30, no estaría mal para ser el primer año, bueno pues en el número 30 haremos un balance reflexivo

Hasta la próxima amigos y por favor no dejen de mostrar sus inquietudes, quejas, llamadas de atención, lo que fuera, esto hace lindo el asunto

Abrazos

Aldo