Continuamos con la sección Peruana, y buscando y rebuscando encuentro este problemita simpático.

Sección Peruana

Problema 1

Hallar el verdadero valor de la expresión siguiente: $\dfrac{\cos 2a}{\cos a - \cos 45^o}$, para $a=45°$.

Fuente: Universidad Nacional de Ingeniería – Lima Perú – Examen de Admisión 1975- Geometría y Trigonometría

Solución:

$$y=\frac{\cos 2a}{\cos a - \cos 45^o}=\frac{\cos 90^o}{\cos 45^o - \cos 45^o}=$$

$$\frac{\cos 2a}{\cos a - \frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{0}{0}=.$$ Indeterminado.

$$=\frac{\cos 2a}{\cos a - \frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}\cos 2a}{\sqrt{2}\cos a - 1}\cdot\frac{\sqrt{2}\cos a + 1}{\sqrt{2}\cos a + 1}=$$

$$\frac{\sqrt{2}\cos 2a(\sqrt{2}\cos a + 1)}{2\cos^2 a - 1}=$$

$$\frac{\sqrt{2}\cos 2a(\sqrt{2}\cos a + 1)}{\cos 2a}=$$

$$\sqrt{2}(\sqrt{2}\cos a + 1)=\sqrt{2}(\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}+1)=$$

$$\sqrt{2}(1+1)=2\sqrt{2}$$

Solución: Oficial de la Universidad recopilada por Aldo Gil.

Problema 2

El salmón avanza en los ríos durante la primavera y el verano, para desovar en el otoño, tras de lo cual regresa al mar.

Un pescador da cuenta que una determinada distancia a contracorriente la recorre en 72 minutos y el mismo recorrido a favor de la corriente en 12 minutos menos que si lo hiciera en agua tranquila. ¿Cuanto tiempo tardaran los salmones en recorrer dicha distancia siguiendo la corriente, en su regreso al mar?

Fuente: Mi amigo Antonio Quintero de México – Octubre 2006

Solución:

Una pista:

Si P es la velocidad del pez, C la velocidad de la corriente y T el tiempo que queremos averiguar, podemos plantear:

$72\ (P - C) = T\ (P + C) = (T + 12)\ P$

y parece que hay 2 soluciones ...

Despejando T queda una ecuación cuadrática: $T^2-60T+864=0$. Que tiene dos soluciones: 24 y 36 minutos. Su interpretación es:

1^er caso:

El pez duplica la velocidad de la corriente, llamémosla v.

Con corriente en contra, sin corriente y con corriente a favor la velocidad absoluta del pez es: v, $2v$, $3v$, respectivamente.

Y tarda en recorrer el trayecto: 72, 36, 24 minutos respectivamente con 12 de diferencia entre los dos últimos.

2^do caso:

El pez triplica la velocidad de la corriente, llamémosla v.

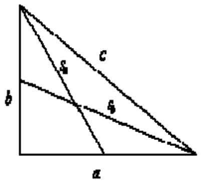
Con corriente en contra, sin corriente y con corriente a favor la velocidad absoluta del pez es: 2v, 3v, 4v, respectivamente.

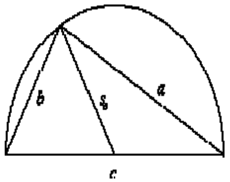
Y tarda en recorrer el trayecto: 72, 48, 36 minutos respectivamente con 12 de diferencia entre los dos últimos.

Solución: Por Daniel Ricardo Suárez – lista Snack – Noviembre 2006

Problema 3

En un triángulo rectángulo, s_a y s_b son las medianas de los catetos del triángulo, la mediana de la hipotenusa es s_c. Determinar el maximo valor de la expression:





$$\frac{s_a+s_b}{s_c}\le\frac{2.\frac{\sqrt{10}}{4}.c}{\frac{1}{2}.c}=\sqrt{10}\,\frac{s_a+s_b}{s_c}.$$

Fuente: Komal Hungria, Solutions for problems "B" in September, 2000-Problema B.3383-by Á. Besenyei, Tatabánya

Solución:

Por el teorema de Pitágoras, tenemos: $s_a^2=(\frac{a}{2})^2+b^2$, $s_b^2=b^2+(\frac{a}{2})^2$, y por Thales $s_c=\frac{c}{2}$.

Por la inecuación de las medias aritméticas y geométricas tenemos:

$$\frac{s_a+s_b}{s_c}\le\sqrt{\frac{s_a^2+s_b^2}{2}}=\sqrt{\frac{5}{8}\left(a^2+b^2\right)}=\frac{\sqrt{10}}{4}c$$

y $$\frac{s_a+s_b}{s_c}\le\frac{2.\frac{\sqrt{10}}{4}.c}{\frac{1}{2}.c}=\sqrt{10}$$

La igualdad se cumple si y solo si $a=b$.

Solución: Resuelto por los proponentes de la prueba, traducción de Aldo Gil C.

Problema 4

Antes de plantear el problema, recogí este artículo de Bruno Holanda del grupo TEOREMA de Brasil, que desarrolla una muy interesante forma de resolver problemas algebraicos por medio de métodos geométricos.

El menciona que muchas escuelas tiene un profesor de Algebra y un profesor de Geometría, y que con el ejemplo que vine probaremos que la distancia entre estos temas es menos aislado de lo que parece. Inclusive menciona una frase que también se escucha por acá: "Adoro la Geometría, pero odio el Algebra". Reflexivo no?

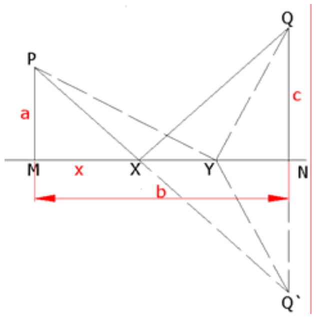
¿Cuál es el menor valor de la función real: $f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{(b-x)^2+c^2}$

Fuente: Revista SIGMA – Grupo Teorema Número 1-Problema 1

Solución

Los aficionados al cálculo podrán decir: *¡Basta derivar!*. Es posible resolver el problema por derivación, pero es más atractivo si pensamos geométricamente.

Sea *r* una recta en el plano y sean *P* y *Q* puntos en un mismos semiplano, tales que las distancias de estos puntos a la recta *r* sean *a* y *c* respectivamente. Suponga que la distancia entre sus proyecciones *M* y *N* sea *b*. Además de esto sea *X* un punto variable sobre *r* entre los puntos *M* y *N* de modo que *MX=x*. De esta manera vemos que *f* puede ser escrita como se indica:



f(x)= PX+XQ, o sea queremos hallar un punto *X* sobre *r* que minimiza la suma *PX+XQ*. Con estos datos podemos intuir una solución.

Sea *Q`* el punto simétrico de *Q* en relación a *r*. De hecho, si Y es un punto cualquiera sobre *r*, por la desigualdad triangular tenemos:

PX+XQ = PX+XQ´= PQ´

< PY+YQ´= PY + YQ.

Para concluir el problema, basta hacer algunas conjeturas:

Como los triángulos *PMX* y *Q´XN* son semejantes, tenemos: $\frac{x}{a}=\frac{b-x}{c}$, una ecuación de 1º grado con raíz $x_0=\frac{ab}{a+c}$. Luego el valor mínimo de *f* es: $f(x_o)=\sqrt{(a+c)^2+b^2}$

Fino eh???

Referencias:

- ¿Algebra=Geometría? Bruno Holanda Brasil, Mayo 2006

- Arthur Ángel, Problem-Solving Strategies, 1998

- Ross Honsberg, In Polya`s Footsteps, AMS 1997

Solución: Resuelto por los proponentes, adaptación, comentarios y traducción de Aldo Gil

---

Problema 5

Los números reales *x* e *y* satisfacen las siguientes ecuaciones:

sen x + cos y = 1

cos x + sen y = -1

Probar que: *cos 2x = cos 2y*.

Fuente: Problemas seleccionados de Round Final Olimpiada Estonia 2004-Problema 4

Solución

Elevando al cuadrado ambos miembros tenemos:

$sen^2x+2sen\ x.cos\ y+cos^2y = 1$

$cos^2x+2cos\ x.sen\ y+sen^2y=1$

Sumando y simplificando obtenemos: *sen x.cos y+sen y.cos x=0,* o en forma equivalente: *sen(x+y)=0.*De aquí: $x+y=k\pi$, donde *k* es entero. Por lo tanto: $2x=2k\pi-2y$, y en consecuencia: *cos 2x= cos 2y*.

Nota de redacción (o sea nuevamente yo). Existe una solución por arco mitad, para que practiques un poco

Solución: Los proponentes y traducida por Aldo Gil

Problema 6

Encontrar los números de tres dígitos $\overline{abc}$ tales que: $\overline{abc}=abc(a+b+c)$ donde $\overline{abc}$ es la representación decimal del número

Fuente: Olimpiadas Balcanes Junior 2005- Problema 4

Solución

Estos son los problemitas agradables, donde viene el análisis puro, sencillo y lógico tomando el conocimiento elemental de la numeración, no dejan de ser bellos.

La condición es equivalente a: *100a+10b+c=abc(a+b+c)* $\Leftrightarrow$ *9(11a+b) = (a+b+c)(abc-1)*. Ahora veamos los casos:

i) si *a+b+c=9k* con $k\leq 3$. Si *a+b+c+=9*, las soluciones son: *a=1, b=3, c=5* y otra solución *a=1, b=c=4*. Si *a+b+c=18* no hay soluciones. Si *a+b+c=27* entonces tampoco existen soluciones.

ii) si *abc-1=9m*, tampoco hay soluciones.

iii) si $a+b+c=3n$, $n\leq 8$ y a la vez $abc-1=3l$. Después de todas las pruebas encontramos una única solución: $a=1$, $b=c=4$.

Por lo tanto solo existen dos números: 135 y 144

Solución: Por silouan 2005- Traducción de Aldo Gil

Problema 7

Encontrar el residuo cuando: $x^{12}+1$ es dividido por $x-1$.

Solución

Este si lo leí a la pasadita por algún lado de la internet, y no anote la procedencia, y el autor simplifica muy rápidamente el asunto, (yo ya me disponía a aplicar Horner, Ruffini, ó hacer la división convencional), pero no había pescado el detalle, no es que me considere maravilla, pero es bueno tener tino, paciencia, y pensar un poquitín antes de lanzarnos, mas que problema me parece una moraleja.

El residuo de dividir por $x-1$, es lo mismo que si el dividendo toma su raíz $x=1$, por lo tanto la respuesta es 2. A secas eh!!!!!

Solución: Del compadre que lo puso y traducción sin mucho que traducir de Aldo Gil.

Problema 8

Probar que la ecuación $4x^3-3x+1=2y^2$ tiene por lo menos 31 soluciones para x e y, con $x \leq 2005$.

Fuente: Donova Mathematical Olympiad 2005-Problema 1

Solución:

Suponer que $x=2k+1$ $(k\leq 1002)$.

$(x+1)(2x-1)^2=2y^2 \Rightarrow (k+1)(4k+1)^2=y^2$.

Luego, si $(k+1)$ es un cuadrado, nuestra ecuación tiene una solución. Ahora, vemos que es muy sencillo ver que 31 cuadrados perfectos ≤ 1002.

Solución: Resuelto por e. lopes 2006- Traducido por Aldo Gil.

Problema 9

Si: $a^3+3a+14 = 0$.

$b^3+3b+14 = 0$.

$c^3+3c+14 = 0$.

Hallar el valor de: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Fuente: The New York City Contest Problem Book: Problems and Solutions from the New York City Interscholastic Mathematics League 1975–1984, Grades 10–12

Solución:

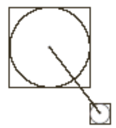
Notamos que: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+ac+bc}{abc}$.

También sabemos que a,b y c son raíces distintas de la ecuación $x^3+3x+14 = 0$, así $x^3+3x+14 = 0=(x-a)(x-b)(x-c)$. El término constante 14 es $-abc$, de tal modo que $abc = -14$, y el coeficiente de x, ó 3, es $ab+ac+bc$, así

$$\frac{ab+ac+bc}{abc}=\frac{3}{-14}=-\frac{3}{14}$$

Solución: Resuelto por los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Problema 10

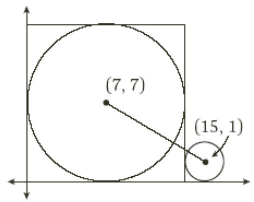


Las áreas de los dos cuadrados adyacentes son 4 cm^2 y 196 cm^2. Hallar la longitud del segmento que une los centros de los círculos inscritos.

Fuente: De la Red, pero no tengo la fuente

Solución:

En este caso quiero que se vea el artificio de utilizar las coordenadas cartesianas para la solución de problemas geométricos, es bastante útil de vez en cuando, y con un ejemplo sencillito se ve la importancia del sistema.



Sea el vértice inferior izquierdo, de coordenadas (0, 0). De aquí los centros son (7, 7) y (15, 1). La longitud del segmento es igual $x=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

Solución: Resuelto en Internet y traducción de Aldo Gil.

Mis queridos amigos:
Como siempre con mucho cariño y de repente con algunos errores, pero ya estamos por el 28, que bárbaro no pensé llegar hasta aquí, y lo mas torturante (para ustedes, no para mi) es que todavía hay buena cantidad de material.
Au Revoir… (que huachafo, pero de tanto traducir, se me pega el asunto)
Chau
Aldo