

A partir de este número vamos a implementar la Sección Peruana, es decir el primero ó dos primeros problemas serán extraídos de los exámenes de Admisión a distintas Universidades de mi país. Les va a gustar.

**Sección Peruana**

**Problema 1**

Una ecuación da como solución una fracción ordinaria irreductible, de manera que el término del denominador excede al numerador en 10878. Halle la suma de los términos de la fracción, sabiendo que reducida a decimal da una parte periódica mixta que tiene tres cifras en la parte no periódica y seis cifras en la parte periódica.

Fuente: Universidad Nacional de Ingeniería – Lima Perú – Examen de Admisión 2002-II- Problema 5

**Solución:**

Sea  $\frac{N}{D}$  = fracción ordinaria irreductible.  
N y D son PESI

Dato  $\frac{N}{D} = \Rightarrow 0,abc\overline{defghi}$ . Además:  $D - N = 10878 \Rightarrow D$  y 10878 son PESI.

$D - N = 2.3.7^2.37\dots(I)$

Entonces la parte no periódica proviene del factor  $5^3$ , y la parte periódica proviene de factores del número:  $999999 =$

$3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ . Luego  $D =$

$5^3 \cdot 11 \cdot 13 = 17875$

En (I):  $N = 17875 - 10878 = 6997$

$\Rightarrow \frac{N}{D} = \frac{6997}{17875}$ , por lo tanto

$N + D = 24872$ .

**NOTA.- PESI significa primos entre si.**

Solución: Oficial de la Universidad y recopilada por Aldo Gil.

**Problema 2**

Este es un extracto de un artículo aparecido años atrás en la Revista EUREKA de la Olimpiada Matemática Brasileña, y me parece muy prudente poner esta pizca de sabiduría, realmente muy bueno el artículo, pero bastante amplio, pero creo que con este aporte nos puede dar luces acerca de la PARIDAD

Todo número natural es par o impar.

Elemental, no? La afirmación de encima, que es una de las más simples y obvias de la Matemática, es también una herramienta de gran utilidad en la resolución de muchos problemas que envuelven números naturales. Vamos comentar algunos de ellos, mas en principio precisamos recordar tres importantes propiedades:

- a) la suma de dos números pares es par.
- b) la suma de dos números impares es par.
- c) la suma de un número par con un número impar es impar.

Decimos que dos números enteros tienen la misma *paridad*, cuando ambos son pares ó ambos impares. Asimismo, podemos decir que la suma de dos números enteros es par si, y solamente si, ellos tienen la misma paridad. Aquí un ejemplo de aplicación:

Demostrar que si  $a, b$  y  $c$  son enteros impares, la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$ , no tiene raíz racional.

**Solución**

Imaginemos que el número racional  $\frac{p}{q}$

sea raíz de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$  donde  $a, b$  y  $c$  son enteros impares. Luego, haciendo la sustitución, debemos tener,

$a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = 0$

$a\frac{p^2}{q^2} + b\frac{p}{q} + c = 0$

$ap^2 + bpq + cq^2 = 0$

Vamos a elaborar ahora una hipótesis importante para facilitar nuestro trabajo.

Vamos a suponer que la fracción  $\frac{p}{q}$  sea

*irreductible*, o sea, que fue simplificada

al máximo. Por ejemplo, en lugar de  $\frac{4}{6}$

estaremos considerando  $\frac{2}{3}$  que es lo

mismo. Consideramos entonces, para la

solución del problema, que  $p$  y  $q$  no son ambos pares.

Observe ahora la ecuación  $ap^2 + bpq + cq^2 = 0$  en los siguientes casos:

a)  $p$  y  $q$  son impares: en este caso,  $ap^2$  es impar,  $bpq$  es impar y  $cq^2$  es impar.

Como la suma de tres números impares es impar, el resultado no puede ser cero.

b)  $p$  es par y  $q$  es impar: en este caso,  $ap^2$  es par,  $bpq$  es par y  $cq^2$  es impar.

Como la suma de dos números pares y un impar es impar, el resultado no puede ser cero.

c)  $p$  es impar y  $q$  es par: vale el mismo argumento del caso b).

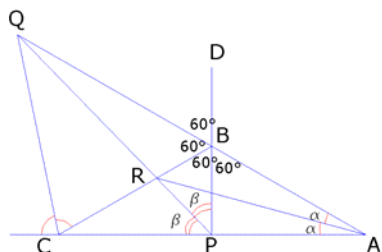
Demostramos entonces que ninguna fracción de numerador y denominador enteros puede ser raíz de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$  donde  $a, b$  y  $c$  son enteros impares.

Solución: Artículo aparecido en revista Eureka N° 1 con traducción de Aldo Gil.

**Problema 3**

En un triángulo  $ABC$ , el ángulo del vértice  $B$  mide  $120^\circ$ . La bisectriz de este ángulo intercepta a  $AC$  en  $P$ . la bisectriz del ángulo exterior  $C$  intercepta a  $AB$  en  $Q$ , y finalmente,  $PQ$  intercepta al lado  $BC$  en  $R$ . Hallar la medida de  $\angle PRA$ .

Fuente: Problemas Preparatoria KOMAL-Hungría-Septiembre 2000-Problema 3388-S. Katz



**Solución**

Primero, considerar el triángulo  $CPB$ .  $\angle QBC=180-120=60^\circ$ . Prolongamos  $PB$  hasta un punto arbitrario  $D$ ,  $\angle DBQ=60^\circ$  (opuestos por el vértice), esto es  $BQ$  es la bisectriz exterior del triángulo  $\triangle BCP$ . Lo mismo sucede también para  $CQ$ ; conectando su intersección  $Q$  con  $P$ , obtenemos un ángulo bisectriz. En

consecuencia:  $\angle CPQ = \angle BPQ = \beta$ .

Ahora consideramos el triángulo  $\triangle BPA$ .  $BR$  y  $PR$  son ángulos bisectrices exteriores,  $RA$  es un ángulo bisectriz, en consecuencia  $\angle BAR = \angle PAR = \alpha$ .  $\angle CPB$  es un ángulo exterior del triángulo  $PAB$ , así  $2\beta = 60 + 2\alpha$ ,  $\beta = 30 + \alpha$ .

$$\angle BPA = 180 - (60 + 2\alpha) = 120 - 2\alpha$$

$$\angle PRA = 180 - (\beta + (120 - 2\alpha) + \alpha) = 180 - (30 + \alpha + 120 - 2\alpha + \alpha) = 30^\circ$$

Solución: Resuelto por Anna Lovrics- Traducción de Aldo Gil C.

**Problema 4**

Considere una "máquina de transformar números", que funciona conforme a las siguientes reglas:

- (a) recibe un número que remueve su primera cifra, guardando el número resultante.
- (b) copia el resultado de (a), invierte el orden de sus cifras y guarda el número.
- (c) suma los dígitos del número generado en (b) y la suma se anexa al lado derecho del número.
- (d) mostrar el resultado final.

Ejemplos:  $\bullet$  9987 .987 .789 .78924.  
 $\bullet$  1023 .23 .32 .325.

**ALERTA!** En el sistema posicional de representación de números, no se permite el dígito '0' en el lado izquierdo de la representación.

Hallar un número de cinco cifras que no es alterado por esta "máquina". ¿Hay otro?

Fuente: Revista Olimpiada Regional de Santa Catarina-Brasil-VII ORM 2004-Nivel 2-Problema 2

**Solución**

Sea  $\overline{abcde}$  un número de 5 dígitos (a  $\neq 0$ ). Entonces la máquina efectúa:  
 $abcde \rightarrow .bcde \rightarrow edcb \rightarrow edcbx$ , donde:  
 $x = e + d + c + b$

Tenemos entonces dos posibilidades:

- $e \neq 0$ . En este caso, como  $x = 2$  (para un número no se altera), entonces:  $e = e + d + c + b$ , o sea,  $d + c + b = 0$ , lo cual es imposible (esto es  $b \neq 0$ ).

- $e = 0$ . En este caso tenemos:  
 $\overline{abcd0} \Rightarrow \overline{bcd0} \Rightarrow \overline{dcb} \Rightarrow \overline{dcbx}$ , donde  $x$  debe ser un número de 2 dígitos terminado en cero. Tenemos que:  $x = d + c + b$ . (Note que aquí  $b \neq 0$  pues, en

Solución: Resuelto por los proponentes y arreglo y traducción de Aldo Gil

**Problema 5**

Probar que la ecuación  $2^n + 1 = q^2$  no admite soluciones para los enteros positivos  $n$  y  $q$ .

Fuente: Selección para XV Olimpiada Riolplatense – Grupo Teorema 8º serie-Problema 1

**Solución**

Vamos, que esta es una solución reflexiva, lógica e inductiva y sin intentar entrar en situaciones complicadas. Echo shi, ustedes tiene que ir respondiendo las interrogantes. (Todo no es fácil pues...)

Una potencia de 2 deja resto 1, 2 ó 4 cuando es dividida por 7 (Porque?).

Por lo tanto añadiendo 1 a una potencia de 2, obtenemos un número que deja resto 2, 3 ó 5 cuando es dividido por 7

Solución: Resuelto por los proponentes y traducción de Aldo Gil

caso contrario, tendrían  $x = d + c + b$  y  $x$  con 3 dígitos)

Hay entonces dos posibilidades:

- (a)  $x = 10 = d + c + b$ . Entonces  $d = 1, a = d = 1, b = c$ , lo que induce a que  $b + c = 9$ , lo cual es imposible pues  $b = c$ .

- (b)  $x = 20 = d + c + b$ . Entonces  $d = 2, a = d = 2, b = c$ . lo que induce a que:  $b + c = 18$ , de ahí  $b = c = 9$  (única respuesta).

Por lo tanto el único número que no es alterado por la máquina es 29920

(Porque se escoge el 7?).

Como todo cubo perfecto deja resto 0, 1 ó 6 cuando es dividido por 7, un cubo perfecto nunca es igual a una potencia de 2 mas 1.

**Problema 6**

Probar que existen un número infinito de primos relativos  $(m; n)$  enteros positivos tales que la ecuación:  $(x + m)^3 = nx$  tiene 3 raíces enteras distintas.

Fuente: 13th International Mathematics Competition for University Students-Odessa 2006 - Second Day- Problema 5

**Solución**

Sustituyendo  $y = x + m$ , podemos reemplazar la ecuación por  $y^3 - ny + mn = 0$

Sean dos raíces  $u$  y  $v$ ; la tercera debe ser  $w = -(u + v)$ , debido a que la suma es 0. Además las raíces deben satisfacer también:

$$uv + uw + vw = -(u^2 + uv + v^2) = -n;$$

$$\text{por ejemplo: } u^2 + uv + v^2 = n$$

$$\text{y } uvw = -uv(u + v) = mn$$

Necesitamos un par de enteros  $(u;v)$  tales que  $uv(u + v)$  sea divisible por  $u^2 + uv + v^2$ .

Asumimos que tales pares sean de la forma  $u = kp$  y  $v = kq$ ; entonces:  $u^2 + uv + v^2 = k^2(p^2 + pq + q^2)$ ; y  $uv(u + v) = k^3pq(p + q)$ .

Solución: Respuesta oficial, adaptación, diagramación y traducción de Aldo Gil

**Problema 7**

Sean  $h_1, h_2, h_3$  las alturas de un triángulo, y sea  $\rho$  el radio de su círculo inscrito. Encontrar el menor valor de:  $\frac{h_1 + h_2 + h_3}{\rho}$ , para todos los triángulos.

Fuente: PROBLEM OF THE WEEK - Problem No. 4 (Spring 2005 Series)

**Solución:**

Escogemos  $p$  y  $q$  tales que sean coprimos, entonces  $k = p^2 + pq + q^2$

$$\text{tenemos } \frac{uv(u + v)}{u^2 + uv + v^2} = p^2 + pq + q^2$$

$$\frac{uv(u + v)}{u^2 + uv + v^2} = p^2 + pq + q^2.$$

Sustituyendo en las ecuaciones originales, tenemos las siguientes familias de casos:

$$n = (p^2 + pq + q^2)^3 \text{ y } m = p^2q + pq^2;$$

y las tres raíces son:

$$x_1 = p^3; x_2 = q^3; x_3 = -(p + q)^3$$

Sea  $S$  el área y sean  $a, b, c$ , los lados del triángulo. Tenemos que  $h_1 = \frac{2S}{a}$ ;

$$h_2 = \frac{2S}{b}; \text{ y } h_3 = \frac{2S}{c}.$$

También tenemos que:  $\rho = \frac{S}{p}$ , donde  $2p = a + b + c$ .

$$\text{De aquí: } \frac{h_1 + h_2 + h_3}{\rho} =$$

$$(a+b+c) \cdot \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$$

Entonces en consecuencia  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ , tenemos que  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 6$ . El valor mínimo será 9. El triángulo donde se cumple este mínimo es un triángulo equilátero

Solución: Resuelto por Daniel Vacaru, Pitesti, Romania-Traducción de Aldo Gil C.

**Problema 8**

En un triángulo  $ABC$ ,  $AD$  es la bisectriz de  $\angle A$ . Demostrar que  $AD < \sqrt{AB \cdot AC}$ .

Fuente: 23° Olimpiada de Hungría 1916-Problema 2

**Solución**

Considere la circunferencia circunscrita al triángulo  $ABC$ .

La bisectriz  $AD$  encuentra a la circunferencia en  $E$ , punto medio del arco  $BC$ . Como los ángulos  $ABC$  y  $AEC$  son iguales (cada uno de ellos vale la mitad del arco  $AC$ ) y como los ángulos  $BAE$  y  $EAC$  son también iguales (porque  $AD$  es una bisectriz), concluimos que los triángulos  $ABD$  e  $AEC$  son semejantes. De ahí,  $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$

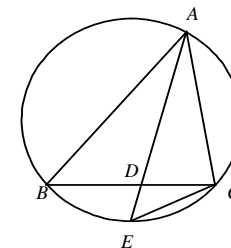
$$\text{o sea: } AD \cdot AE = AB \cdot AC$$

Como  $AD$  es menor que  $AE$  tenemos que:

$AD \cdot AD < AB \cdot AC$  o sea,

$$AD < \sqrt{AB \cdot AC}$$

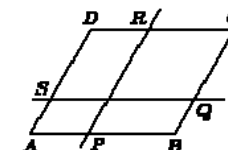
Solución: Aparecido en revista Eureka N° 4 (Problemas antiguos) - con traducción de Aldo Gil.



**Problema 9**

Un simpático problemita...

El área del paralelogramo  $ABCD$  es 2 unidades.



La línea paralela a  $AD$  intercepta al paralelogramo en  $P$  y  $R$ , y la paralela a  $AB$  intercepta el paralelogramo en  $S$  y  $Q$ , como muestra la figura.

¿Cual es el área total de los triángulos  $AQR$ ,  $BSR$ ,  $DPQ$  y  $CSP$ ?

Fuente: *Problems "B" in Setember, 2001-Komal-Math-Hungria-Problem B.3473*

**Solución**

Si  $AP=xAB$  y  $AS=yAD$  entonces el área del triángulo  $ABQ$  es  $y$ .

- El área del triángulo  $ARD$  es  $x$ , y el triángulo  $CRQ$  es  $(1-x)(1-y)$ .

- De aquí, el área del triángulo  $AQR$  es  $2-x-y-(1-x)(1-y)$ .

Con un razonamiento similar, las áreas de los triángulos  $BSR$ ,  $DPQ$  y  $CSP$  son:

$2-(1-x)-y-x(1-y)$ ,  $2-x-(1-y)-(1-x)y$ , y  $2-(1-x)-(1-y)-xy$ , respectivamente. Sumando las áreas tenemos:  $8-2(x+(1-x))-2(y+(1-y))-(x+(1-x))(y+1-y))=3$ , para el área total.

*Comentario: Echo shi mis amigos, deduzcan un poquito el asunto, hagan un par de numeritos, sino no van a entender nada, yo tuve que hacerlos para ver si era verdad, y los voy a transcribir.....hum!!! mejor no, a trabajar muchachos, ya están los resultados en mi tacho de basura.*

*Solución: Resuelto por los proponentes con traducción e irreverencia de Aldo Gil.*

**Problema 10**

Para terminar el folleto N° 27, caemos con este ejercicio.

*Siempre he tenido una sutil curiosidad por las ecuaciones diofánticas, son verdaderamente apasionantes, y por esto me permití transcribir este ejemplo de ecuaciones diofánticas publicado por la OMA (Olimpiada Matemática Argentina)*

Consideramos el siguiente problema:

Una solución en los enteros positivos de la ecuación:  $19x + 83y = 1983$  es  $(x,y) = (100,1)$ . Hay solo otro par de enteros positivos  $(x,y)$  que satisfacen la ecuación, ¿cuál es ese par?

Fuente: *Olimpiada Matemática Argentina-Rama Roja XXIX-Problema 1*

**Solución:**

Si bien hay métodos alternativos, a veces más cortos, para resolver casos particulares (veremos uno en la alternativa 2) Euclides desarrollo una técnica general. Ese método es el siguiente:

**Alternativa 1:**

$19x + 83y = 1983$

$$x = \frac{1983 - 83y}{19} = 104 - 4y + \frac{7 - 7y}{19}$$

Es decir,  $x = 104 - 4y + u$ , con  $u$  entero,

$$u = \frac{7 - 7y}{19}$$

Por lo tanto,  $7y + 19u = 7$ .

Tenemos ahora una nueva ecuación diofántica, similar a la original, pero con coeficientes más pequeños.

Si reiteramos el procedimiento

$7y = 7 - 19u$

$$y = \frac{7 - 19u}{7} + \frac{2u}{7} = 1 - 3u + \frac{2u}{7} = 1 - 3u + v$$

con  $v$  entero,  $v = \frac{2u}{7}$ , de aquí:  $2u - 7v = 0$

Es decir,  $u = 3v + \frac{v}{2} = 3v + w$ , con  $v = 2w$ .

Sustituyendo obtenemos

$u = 3v + w = 6w + w = 7w$

$y = 1 - 3u + v = 1 - 21w + 2w = 1 - 19w$ .

$x = 104 - 4y + u = 104 - 4(1 - 19w) + 7w = 100 + 83w$ .

O sea,  $(x,y) = (100 + 83w, 1 - 19w)$  con  $w$  entero arbitrario.

Esta fórmula da todas las soluciones enteras de la ecuación original.

En nuestro problema tenemos la restricción de que  $x$  e  $y$  deben ser enteros positivos. Los únicos valores posibles de  $w$  son  $w = 0$ ,  $w = -1$ .

Los únicos valores posibles de  $(x,y)$  son:  $(100,1)$  y  $(17,20)$ .

El par que estábamos buscando es  $(17,20)$ .

*Nota:* Hemos desarrollado un procedimiento general que puede aplicarse para encontrar la solución general de ecuaciones similares a la planteada.

**Alternativa 2:**

En este problema podríamos haber utilizado un atajo, aprovechando otra técnica que desarrollo Euclides.

Como una solución de  $19x + 83y = 1983$  es  $(100,1)$ ,

$$\begin{aligned} 1983 &= 19x + 83y = 19 \cdot 100 + 83 \cdot 1 = \\ &= 19 \cdot 100 - 19 \cdot 83 + 83 \cdot 1 + 19 \cdot 83 \\ &= 19 \cdot (100 - 83) + 83 \cdot (1 + 19) = \\ &= 19 \cdot 17 + 83 \cdot 20 \end{aligned}$$

y obtenemos una segunda solución  $(17,20)$ .

Parece un truco de magia y en cierto sentido, lo es, pero recordemos que el gran problemista George Polya dijo que "un método es un artificio ingenioso que se puede usar mas de una vez".

Esta técnica desarrollada en la **Alternativa 2** se puede usar para obtener mas soluciones de una ecuación diofántica de tipo del problema cuando ya se conoce alguna.

La clave es que si nos dieron una solución entera  $(x,y)$  de la ecuación:  $ax + by = c$ , sumamos múltiplos de  $ab$  a uno de los términos y los restamos del otro. De este modo obtenemos nuevas soluciones.

En el ejemplo, restamos  $19 \cdot 83$  del término  $19 \cdot 100$  y lo sumamos al término  $83 \cdot 1$

Ese resultado sigue siendo  $1983$  y así obtuvimos la solución  $(17,20)$

Si hubiésemos sumado 19.83 al primer término y lo restábamos del segundo, tendríamos la solución (183,-18), que no satisface la restricción de este problema:  $x$  e  $y$  son enteros positivos.

Aquí les dejo unos ejercicios para aplicar los métodos mencionados con anterioridad

**EJERCICIOS:**

**1.** ¿Cuántas soluciones enteras positivas tiene la ecuación  $3x + 5y = 1008$ ?

**2.** Si  $x$  e  $y$  son enteros tales que:  $(x-2)^2 + 2y^2 = 27$ . ¿Cuáles son los posibles valores de  $x$ ?

*Solución: Recopilado por Aldo Gil C.*

---

*Hasta aquí llegamos mis queridos amigos, como ven el problema nueve es un interesante artículo sobre las ecuaciones diofánticas, y por allí que tengo mas material que estoy traduciendo en la misma perspectiva, dar elementos teóricos, curiosos, prácticos, y en fin todo lo que les facilite una mejor enseñanza o aprendizaje, si ya lo conocen lo ignoran, pero por allí algún amigo/a no había visto algo así.*

*Espero sus comentarios,*

*Hasta la próxima, Aldo*