Hola mis queridos amigos:

Después de unas vacaciones, se me ocurrió una reestructuración de los folletos, para que sean más agradables a la vista, inspirado en los Andes de mi país, en la ciudad de Huaraz, ver lo imponente del Huascarán, que no tiene nada que envidiar a los Alpes Suizos, y por supuesto más barato. (No se me vayan a molestar los europeos). Pero de que tenemos belleza en mi país, pues la tenemos.

Y bueno, creo por conveniente hacer unas modificaciones, que por supuesto creo que le vana a dar más categoría al asunto, con algunos aportes y notas, que en fin me parecen agradables.

Eso si, lo primero que exijo por parte de ustedes es una opinión de cómo quedo la hoja, si les agrada, esta muy cargada, hay que aligerarla, en fin, no sean tímidos y cargarle con todo al asunto.

Sin mas ni mas, Aldo reloaded………….

Problema 1

Este es un problemita bonito de estas olimpiadas brasileñas, como me ha llegado el material fresco me emociono, y de repente hay varios juntos, lo importante es que sean interesantes ¿o no

Un cheque es entregado por un valor de x reales con y centavos, ambos números de dos dígitos. Por equivocación, al momento de cobrar se recibió y reales y x centavos, aumentando en *R$* 17,82 el valor correcto. ¿Cuáles son los posibles valores del cheque?

NOTA: No creo que sea necesario aclarar pero 1 real tiene 100 centavos.

Fuente: Olimpiada Regional de Matemática Santa Catarina Brasil- 1998 – Problema 5 Nivel 2

Solución:

Sabemos que: x reales con y centavos = $x+\frac{y}{100}$, mientras que y reales con x centavos = $y+\frac{x}{100}$, entonces:

$\left(x+\frac{y}{100}\right)-\left(x+\frac{y}{100}\right)=17{,}82 \Rightarrow 99y-99x=1782 \Rightarrow y-x=18 \Rightarrow y=x+18$, pero

$10\le x\le 99$ y $10\le y\le 99$, debido a que x e y son números de dos dígitos, por lo tanto: $x \ge 10$ entonces $y \ge 28$, y si es que $y \le 99$, entonces $x\le 99-18$ o sea $10\le x\le 81$ y $28\le y\le 99$.

Solución: Resuelto por los proponentes de la prueba, traducción y nota de Aldo Gil C.

Problema 2

A veces tenemos que pegarla con derivadas (con las Superiores), me han pedido y pues hay que poner estas cositas, si no me acusan de discriminador (arrochador se dice en Perú), claro por supuesto que cositas simples nomás, pues la idea es ser didáctico, una vez discutía por Internet con un amigo y me decía que hay que elevar el nivel, pero creo que si lo levantamos, suceden dos cosas:

a) Que muchos de los amigos no van a sentir de utilidad el asunto.

b) la principal, que no soy un experto en mate superiores (ni en las inferiores creo), así que seria demás meterme a traducir cosas que no domino y pues a lo mejor se cometen errores garrafales

Así que mejor le damos a lo que sabemos (más o menos).

Hallar la derivada de $\tan^2(2x+1)$ usando dos métodos diferentes.

Fuente: Calculus I (AB): The Chain Rule Problem Eight: 1999-2000

Solución

Método Uno (La regla de la cadena):

$f(x) = \tan^2(2x+1)=[\tan(2x+1)]^2$

$f'(x) = 2[\tan(2x+1)].\sec^2(2x+1).2$

$f'(x) = 4\sec^2(2x+1).\tan(2x+1)$

Método Dos (La regla del producto):

$f(x) = (\tan(2x+1)(\tan(2x+1))$

$f'(x) = \tan(2x+1).\sec^2(2x+1).2$

$+\tan(2x+1).\sec^2(2x+1).2$

$f'(x) = 4\tan(2x+1).\sec^2(2x+1)$

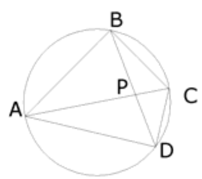
Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil

Problema 3

El cuadrilátero *ABCD* esta inscrito en un círculo de radio 1, de tal manera que la diagonal *AC* es diámetro del círculo, mientras que la otra diagonal *BD* es igual a *AB*. Las diagonales se interceptan en P. Si la longitud de *PC* es 2/5. ¿Cuál es la longitud de *CD*?

Fuente: Baltic Way 1992-Mathematical Team Contest – Problema 17

Solución:



Denotemos $\angle ACD=2\alpha$. Entonces $\angle CAD=\frac{\pi}{2}-2\alpha$, $\angle ABD=2\alpha$, $\angle ADB=\frac{\pi}{2}-\alpha$ y $\angle CDB=\alpha$.

Por el teorema de senos aplicados a los triángulos *DCP* y *DAP* resulta: $\frac{DP}{sen 2\alpha} = \frac{2}{5 sen\alpha}$ y $\frac{DP}{sen\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)} = \frac{8}{5 sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$. Combinando estas ecuaciones tenemos: $\frac{2 sen 2\alpha}{5 sen\alpha} = \frac{8\cos 2\alpha}{5\cos\alpha}$, lo cual da: $4 sen\alpha \cos^2\alpha = 8\cos 2\alpha . sen\alpha$ y $\cos 2\alpha + 1 = 4.\cos 2\alpha$. Así obtenemos $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$, y $|CD| = 2\cos^2\alpha = \frac{2}{3}$

Solución: Resuelto por los proponentes y traducción de Aldo Gil C.

Problema 4

Dado un triángulo *ABC* con *AC+BC=3AB*. El incírculo con centro *I* toca a *BC* y *CA* en *D* y *E* respectivamente. Sean *K,L* puntos simétricos con respecto a *I*. Probar que *A,B,K,L* están en un círculo.

Fuente: Polonia 2º Round 2006-Day 1-Problema 2- France Team selection Test 2006-Day 2-Problema 2 - Germany Team Selection Tests 2006-Day 2-Problema 2

Solución:

Sea *C`* un punto simétrico a *C* con respecto a *I*, *A`* está en *CA* tal que *CA`= 2AB* y *B`* está en *CB*, tal que *CB´= 2AB*. *CA+CB=3AB* implica que *CD=AB*, *BB´=DA* y *AA´= EB*. Vemos que: *C`B`=C`A`=2IE* y *C`K=C`L =CE=AB*. El triángulo *C`B`B* es congruente con *ADK* y *C`A`A* con *BLE*. Se deduce que *C´B=AK y C´A=LB.* Por lo que el triángulo *C´BK* es congruente con *ABK* y *C´AL* con *ABL.* Deducimos que *∠KC´B= ∠KAB* y *∠LC´A= ∠LBA*. Es evidente que *AKBC´* y *ALBC´* son cuadriláteros cíclicos, y por esto *ALKB* es un cuadrilátero cíclico.

Solución: Resuelto por Michal Marcinkowski- Traducción de Aldo Gil

---

Problema 5

ABC es un triángulo acutángulo con circuncentro *O* y ortocentro *H* (y *O≠H*). Demostrar que una de las áreas *AOH, BOH, COH* es la suma de las otras dos.

Fuente: 16th Asian Pacific Mathematical Olympiad 2004- Problema 2

Solución

Este vino así nomás sin figurita, y yo obviamente para traducirlo fui haciéndola con lápiz y papel, es bueno que también lo resuelvan de ese modo, y si te da la fiaca sigue la solución haciendo la figurita.

Sea *G* el centroide. Notar que *OH* es la línea de Euler, tal que *G* esta en *OH*. *A* esta en un lado de la línea *OH*, y *B, C* son los otros lados. Sea *M* el punto medio de *BC*. Entonces la longitud de la perpendicular de *M* a *OH* es la mayor de las longitudes de las perpendiculares de *B* y *C*. Esto es, si $\angle MGO = \theta$, entonces $S_{BOH} + S_{COH} = OH{\cdot}GM \sin\theta = \frac{OH.AG}{2}.\sin\theta = S_{AOH}$.

Solución: Los proponentes y traducción de Aldo Gil

Problema 6

Un número de 4 dígitos tiene la propiedad que la cifra de las unidades es igual a la cifra de las decenas aumentado en 1, la cifra de las centenas es el doble de la cifra de las decenas, y las cifras de las decenas de millar es al menos el doble de la cifra de las unidades. Hallar este número de 4 dígitos, sabiendo que es el doble de un número primo.

Fuente: Slovenian National Math Olympiade 1998-Final Round-1º Grade-Problema 2

Solución

Ya creo que una vez lo dije, me apasionan estos problemitas de numeración, me encantaba en mi época de estudiante Uuuuuuuu!!!, y era un artista resolviendo estos problemas, a ver si le atino a la respuesta, y bueno creo que es para el pizarrón.

Sea el número buscado $\overline{mcdu}$

Establecemos las reglas de deducción:

a) Si es el doble de un número primo, luego es par.
b) Por lo tanto *u= 0,2,4,6 ú 8*.
c) Descartamos *0* debido a que las unidades son 1 unidad mayor que las decenas
d) La cifra de las unidades serán 2,4,6 ú 8 y las decenas serán *d=* 1,3,5, ó 7.
e) La cifra de las centenas es el doble de la cifra de las decenas, por esto descartamos 5 y 7 para las decenas (ya que el doble da un número de dos cifras).
f) Luego *c=* 2 ó 6, y para ir ordenado los números serán $\overline{m212}$ ó $\overline{m634}$

g) Descartamos $\overline{m212}$, ya que su mitad **no es primo** (termina en 12 y su mitad en 6 y es posible seguirlo reduciendo)

h) Como las decenas de millar son *al menos* el doble de las unidades, será 8 ó 9, luego las posibilidades son que los números sean 8634 y 9634, y de aquí es fácil deducir que 9634 es el doble de un número primo.

NOTA.- yo siempre me aviento con los múltiplos de 3, y vi que 8+6+3+4=21 es múltiplo de 3 y par y por lo tanto …)

Solución: Resuelto y traducido por Aldo Gil

Problema 7

Un modo simpático de solución, bien académico por cierto. Hay que poner clásicos de cuando en vez, no?

Hallar el residuo cuando el polinomio $x^{135} + x^{125} - x^{115} + x^5 + 1$ es dividido por x^3-x

Fuente: The Fifteenth W.J. Blundon Mathematical Contest – 1998 – Problema 9

Solución:

$x^{135}+ x^{125}- x^{115}+ x^5+1=(x^3-x).$

$Q(x)+ax^2+bx+c=x(x-1)(x+1)+ ax^2+bx +c$

Esto debe ser válido para cualquier valor de x. Sustituyendo, para $x=0$, $x=1$ y $x=-1$, tenemos: $x=0$: $1= 0 + c \Rightarrow c=1$

$x=1$: $3=0+a+b+c \Rightarrow a+b=2$

$x=-1$: $-1=0+a-b+c \Rightarrow a-b=-2$.

Resolviendo el sistema:

$a+b=2$

$a-b=-2$

de donde: a=0, b=2. Luego el residuo es 2x+1.

Solución: Resuelto por el equipo de la Blundon con arreglo y traducción de Aldo Gil.

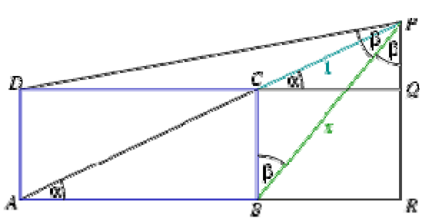
Problema 8

P es un punto en la prolongación de la diagonal AC del rectángulo $ABCD$ ($CP<AP$), tal que $\angle BPD=\angle CBP$. Hallar $PB:PC$.

Fuente: Advanced problems "A" in December, 2001-Komal-Math-Hungria-Problem A.278

Solución

Trazamos las proyecciones de P, Q y R (Q en CD) y R en AB, y sea $\angle PAR=\angle PCQ=\alpha$ y $\angle BPD=\angle CBP=\angle BPR=\beta$. Denominamos la longitud de PC como 1, y



la longitud de de PB como x. El asunto es determinar x.

De los triángulos PCQ y PBR, y el rectángulo $CBRQ$: $x\sin\beta=BR=CQ=\cos\alpha$, esto es: $\operatorname{sen}\beta=\dfrac{\cos\alpha}{x}$.

De los triángulos PDQ, PCQ, PAR, PBR, y el rectángulo $ARQD$,

$$\tan 2\beta=\frac{DQ}{PQ}=\frac{AR}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{PR.\cot\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$=\frac{x.\cos\beta.\cot\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=x.\cos\beta.\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}$$

Reacomodando y sustituyendo:

β $\operatorname{sen}\beta=\dfrac{\cos\alpha}{x}$, tenemos:

$$\frac{x.\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{\tan 2\beta}{\cos\beta}=\frac{2\operatorname{sen}\beta}{1-2\operatorname{sen}^2\beta}=\frac{2\frac{\cos\alpha}{x}}{1-2\frac{\cos^2\alpha}{x^2}}$$

$x^2=2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2$, de aquí: $x=\sqrt{2}$.

Esto es que $PB:PC$ es siempre $\sqrt{2}:1$, independiente del ángulo α.

Comentario: La geometría a veces nos sorprende, con la "independencia", casi siempre de los ángulos en triángulos, cuadriláteros, etc., por eso me gustó este ejercicio que si bien es simple, entromete la trigonometría, y sobre todo el alerta a que ciertos ángulos no son necesario descubrirlos.

Solución: Resuelto por los proponentes con arreglo, traducción e irreverencia de Aldo Gil.

Problema 9

Este va así todo serio nomás:

¿Cuántos ángulos agudos distintos α son tales que: $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha = 1/8$?

Fuente: Mathematical Olympiads' Correspondence Program - 1997-1998-Problem Set 1-Nº 4

Solución:

Recordemos que:

$8\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha=4\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha = 2\sin 4\alpha\cos 4\alpha = \sin 8\alpha.$

La ecuación dada es equivalente a $\sin 8\alpha = \operatorname{sen}\alpha$ con $\operatorname{sen}\alpha\neq 0$.

De aquí tenemos que $\alpha + 8\alpha = \pi$, $8\alpha = 2\pi+\alpha$ ó $8\alpha = 3\pi-\alpha$, desde que α esta estrictamente entre 0 y $\pi/2$. Esto lleva respectivamente $\alpha=\frac{\pi}{9}=20^o$, $\alpha=\frac{2\pi}{7}$, y $\alpha=\frac{\pi}{3}=60^o$. Hay tres ángulos agudos α que satisfacen la ecuación.

Comentario. Alternativamente, note que: $0=\operatorname{sen}8\alpha-\operatorname{sen}\alpha=2\operatorname{sen}\frac{7\alpha}{2}.\cos\frac{9\alpha}{2}$, *de dónde* $7\alpha = 2\pi$ *ó* $9\alpha=\pi$ *ó* 3π.

Solución: Resuelto por los proponentes de la prueba, traducción de Aldo Gil C

<u>*Problema 10*</u>

Artificios y mas artificios, son las reglas del algebra, para resolver situaciones comprometedoras, yo no se realmente si "artificio" es la palabra correcta o "ingenio con agudeza" quedaría mejor, hace mas mérito al que resuelve la cuestión.

Resuelva la ecuación $x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$, en el conjunto de los números reales.

Fuente: Selección para XV Olimpiada Rioplatense – Grupo Teorema 8º serie-Problema 3

<u>Solución</u>

Aquí una solución muy didáctica:

Hagamos $x - \frac{1}{x} = a$.

Entonces x^2-ax-1=0…………………… (1)

De aquí resolvemos: $\frac{1}{x} = x - a$. La ecuación original puede ser escrita ahora como: $x = \sqrt{a} + \sqrt{1-(x-a)}$, o mejor $x - \sqrt{a} = \sqrt{1+a-x}$ ……………………….(2).

Elevando ambos miembros al cuadrado obtenemos, $x^2+a-2x\sqrt{a}=1+a-x$, o mejor $x^2-(2\sqrt{a}-1)x-1=0$………………. (3)

Restando (3) – (1), obtenemos $(2\sqrt{a}-1-a)x=0$. Como x es diferente de cero, entonces: $2\sqrt{a}-1-a=0$. Resolviendo $a=1$. Entonces $x - \frac{1}{x} = 1$, de ahí: x=$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Solución: Resuelto por los proponentes y traducción de Aldo Gil

---

Bueno amigos, para despedirnos inaguramos nuestro recuadrito que llamaremos pinceladas, no es que considere un Da Vinci, ni mucho menos, pero son notitas al pie que me parecen curiosas
A la espera de sus comentarios dulces o ácidos, nos despedimos
<u>Aldo Gil Crisóstomo</u>

PINCELADAS

Sabias que… *el teorema de Napoleón establece que si tres triángulos equiláteros son trazados sobre los catetos de un triángulo cualquiera, (puede ser externo o interno), la unión de los centros de dichos triángulos forma un triángulo equilátero.*