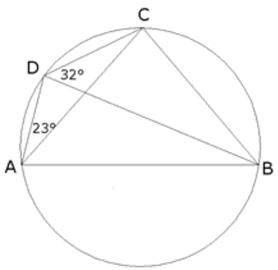
Problema 1



La amplitud del ángulo *BCD* en la figura tiene un valor de 125º. ¿Por qué?

Fuente: Propuesto por Rosa Contreras desde Chile

Solución:

$\angle DAC = \angle DBC$ por estar ambos inscritos en el mismo arco *DC*, los ángulos inscritos en arcos iguales son iguales, entonces el $\angle DBC$ también mide 23 grados. En el triangulo *DCB*, es: $\angle D + \angle B + \angle C = 180º$, por propiedad de la suma ángulos interiores de un triángulo, entonces: $\angle BCD = 180º - (32+23) = 125º$.Eureka!, lo encontré, como dijo Arquímedes.

Solución: Resuelto por José Maria Bertolini

Problema 2

Sea *AB* el diámetro de un círculo con centro 0 y radio R. Sea *CD* una cuerda del circulo que intercepta a *AB* en *E*, tal que $\angle OED = 45°$. Probar que $\overline{CE}^2 + \overline{DE}^2$ es independiente de la ubicación de *E*., probar que $\overline{CE}^2 + \overline{DE}^2$ es una constante.

Fuente: School Science and Mathematics – Problema 4688-Volumen 102 – March 2002

Solución:

Sea $CE = a$, $DE = b$, $EQ = d$ y deducimos que $\angle OEC = 135°$. De los triángulos ΔEDO y ΔEOC tenemos por la ley de cosenos: $(r^2 - b^2 - d^2)^2 - 2b^2d^2 - (r^2 - a^2 - d^2)^2 — 2a^2d^2$. Desarrollando y simplificando tenemos: $(b^2 - a^2)(b^2 + a^2) = 2r^2(b^2 — a^2)$, y por lo tanto $\overline{CE}^2 + \overline{DE}^2$ es una constante. (El caso en que *E* es *O*, por ejemplo, a = *b* resulta trivial.)

Solución: Resuelto por Michael Brozinsky, Central Islip, NY; traducida y adaptada por Aldo Gil

Problema 3

Dado el triángulo ΔABC. Los ángulos bisectrices interiores *de A* y *B* cortan los lados *BC* y *AC* en *D* y *E* respectivamente, y la bisectriz externa del ángulo *C* corta a la prolongación de *AB* en *F.* Probar que los puntos *D*, *E* y *F* son colineales.

Fuente: School Science and Mathematics – Problema 4691-Volumen 102 – March 2002

Solución:

Sin pérdida de generalidad ubicamos el triángulo ΔABC, con los lados opuestos a, *b* y *c*, respectivamente en el plano cartesiano tal que el vértice *A* esta en el

origen, *C* tiene coordenadas $(b, 0)$ y *B* tiene coordenadas (g, h). Sea la bisectriz de $\angle A$ y $\angle C$ que interceptan *BC* y *AB* en *E* y *D* respectivamente, y la bisectriz externa de *B* intercepta a la prolongación de *AC en F:(f,* 0). Por el teorema de la bisectriz $\frac{CE}{BE} = \frac{b}{c}$ y $\frac{AD}{BD} = \frac{b}{a}$. Como resultado las coordenadas de *D*, *E*, y *F* son:

$$D = \left(\frac{b}{a+b}g, \frac{b}{a+b}h\right),$$

$$E = \left(b + \frac{b}{b+c}(g-b), \frac{b}{b+c}h\right),$$

$$F = \left(\frac{cb}{c-a}g, 0\right)$$

Las pendientes de *DE* y FE al simplificar son las mismas; y de aquí los puntos *D*, *E* y *F* son colineales.

Solución: Resuelto por Michael Brozinsky, Central Islip, NY; traducida y adaptada por Aldo Gil

Problema 4

Probar que: $F = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.....\frac{99}{100} < \frac{1}{\sqrt{101}}$

Fuente: School Science and Mathematics – Problema 4693-Volumen 102 – March 2002

Solución:

Sea $G = \frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.....\frac{100}{101}$. En consecuencia: $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, ...\frac{k}{k+1} < \frac{k+1}{k+2}$, $F<G$

Por lo tanto $F^2 < FG = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.\frac{4}{5}...\frac{100}{101}$, y $F < \frac{1}{\sqrt{101}}$

Solución: Resuelto por Wiulliam Feinstein-Wilmette; traducida y adaptada por Aldo Gil

Problema 5

Joder, que es una belleza este problema, claro yo no se si los que organizan el evento se pusieron a sacar las cuentas que se le antoja sacar a Pablo, pero de ser lindo … es lindo.

Hay en una fiesta 16 invitados, y 4 mesas en las que se puede ubicar hasta un máximo de 5 invitados por mesa. ¿De cuantas maneras posibles se pueden distribuir los 16 invitados en las 4 mesas. No importa ni el orden de las mesas (o sea si están sentados en la mesa 1, 2, 3 ó 4 es lo mismo), ni tampoco el orden en que estén sentados en cada mesa (los asientos no están numerados). Lo único que importa es que los integrantes de de las mesas sean distintos.

Fuente: Propuesto por Pablo Adrian Sussi – Lista Snark

Solución:

Podemos repartir 16 comensales en cuatro meses de un máximo de 5, de las siguientes cinco formas:

1) $5 + 5 + 5 + 1$
2) $5 + 5 + 4 + 2$
3) $5 + 5 + 3 + 3$
4) $5 + 4 + 4 + 3$
5) $4 + 4 + 4 + 4$

Para calcularlas fácilmente, ordenamos a las 16 personas y les distribuimos a cada una letra *A*, *B*, *C* ó *D* según la mesa que les corresponda. Se trata entonces de combinaciones con repetición de 16 elementos, entre los que hay, en el primer caso, 5 iguales, otros cinco iguales, cinco más iguales y otro más distinto (pobre infeliz ...). Como en realidad, las mesas solo se diferencian por el número de comensales que acogen, debemos dividir por las permutaciones de las mesas con el mismo número de comensales.

Entonces, para cada una de las posibilidades,

$$\frac{16!}{5!5!5!1!3!}+\frac{16!}{5!5!4!2!2!}+\frac{16!}{5!5!3!3!2!2!}+\frac{16!}{5!4!4!3!2!}+\frac{16!}{4!4!4!4!4!}$$

$$= 2018016 + 15135120 + 10090080 + 25225200 + 2627625 = 55096041$$

Si hay que hacer una fiesta con cada distribución, se van a poner morados "*per secula seculorum*" ...

Solución: Ignacio Larrosa Cañestro - A Coruña (España), resuelto también por José H. Nieto

---

Problema 6

Suponer que un camello debe transportar 3000 bananas al Mercado que se encuentra 1000 kilómetros de distancia. Pero el camello no puede llevar mas que 1000 bananas en cada viaje, y por cada kilómetro que avanza se come una banana (o una fracción), si come una banana (o fracción de ella). Encontrar el máximo número de bananas que pueden llegar al mercado.

Fuente: School Science and Mathematics – Problema 4696-Volumen 102 – March 2002

Solución:

Puesto que el camello no puede llevar más de 1000 plátanos en cualquier momento dado que el camello debe viajar del origen *O* a algún punto *A* a lo largo de la ruta, deje caer un suministro de plátanos en *A*, y retorna a *O*. Si x es la distancia de *O* a *A* en kilómetros entonces, el suministro de plátanos dejados en *A* después de un viaje será $1000 - 2x$. El proceso precedente se repite una segunda vez, acumulando entonces $2000 - 4x$ plátanos en *A* quedando 1000 en *O*. El camello deja *O* por última vez con el saldo de 1000 plátanos hacia *A*. El número

de plátanos ahora es $3000 - 5x$. Para minimizar esa parte de la ruta que debe ser atravesada 5 veces, *A* debe ser: $1000 < 3000 - 5x < 2000$.

Luego deje punto *A* con el camello que lleva sobre el la mitad de los plátanos, viaje para un punto *B*, deja el suministro en *B* y retorna a *A*. Carga los plátanos restantes de *A* en el camello y viaja hacia *B*. Si y es la distancia de *A* a *B* en kilómetros, entonces el número de plátanos ahora en el punto *B* es $(3000 - 5x) - 3y$. Escogemos *B* para que $(3000 - 5x) - 3y \leq 1000$. La distancia de *B* al mercado es $1000 - (x + y)$. El número de plátanos con que el camello puede llegar al mercado es: $(3000 - 5x - 3y) - (1000 - (x + y)) = 2000 - 4x - 2y = 2000 - (4x + 2y)$. Así para conseguir el número más grande de plátanos al mercado, $4x + 2y$ deben ser tan pequeño como sea posible sujeto a las restricciones $200 \leq x < 400$, $y > 0$ y $3000 - 5x - 3y \leq 1000$. Usando la técnica gráfica para resolver este problema de programación lineal la solución óptima es cuando $x = 200$ y $y = 333\frac{1}{3}$. Usando la estrategia perfilada sobre el número del máximo de plátanos que el camello puede entregar al mercado tenemos: $2000 - 800 - 666\frac{2}{3} = 533\frac{1}{3}$.

Solución: Resuelto por N.J. Kuenzi, Oshkosh, WI., traducido a duras penas por Aldo Gil

---

Problema 7

Sea *MN* el diámetro de un semicírculo con centro *C*. Sea *P* un punto en *CN* y sean *A* y *B* puntos en la semicircunferencia tales que: $\angle CAP = \angle CBP = 10°$. Si el arco $MA = 40°$, hallar la medida del arco *BN* .

Fuente: School Science and Mathematics – Problema 4700-Volumen 102 – March 2002

Solución.

Consecuentemente $\angle ACM = 40°$, $\angle CPA = 30°$. Designamos $\angle APB$ por θ. Ahora si aplicamos la ley de senos dos veces tenemos: $\frac{CP}{sen\ 10°} = \frac{AC}{sen\ 30°}$, y

$$\frac{CP}{sen\ 10°} = \frac{BC}{sen\ (30°+\theta)}.$$

En consecuencia $AC = BC$, tenemos $sen\ 30° = sen(30^0 + \theta)$. Luego $\theta = 120° \Rightarrow \angle BCP = 20°$. De aquí, la medida del arco $BN = 20°$.

Solución: Resuelto por: Irwin Feinstein, Wilmette, IL.

Problema 8

Al hilo de cuadrados, áreas y diagonales, hállese las medidas de un rectángulo tal que sus lados, diagonal y área están en progresión aritmética.

Fuente: Aparecido en la lista Matracas el 17 de abril de 2005

Solución

Sean a, $b = a + r$, $d = a + 2r$, $S = a + 3r$. Tenemos que $d = a + 2r = \sqrt{a^2+(a+r)^2} \to a^2 + 4ar + 4r^2 = 2a^2 + 2ar + r^2 \to a^2 - 2ar - 3r^2 = 0$ ....(1)

$S=a+3r=a(a+r) \to a^2+ar - a - 3r = 0 \to$

$r = \dfrac{a^2-a}{3-a}$ .... (2)

Sustituyendo (2) en (1), y sumando las fracciones correspondientes, queda,

$\dfrac{4a^2(3-2a)}{(a-3)^2} = 0 \to a = 0$ ó $a = 3/2$

La solución $a = 0$ ($\to r = 0$) es degenerada. Para $a = \dfrac{3}{2}$, $r = 1/2$, con lo que $a = \dfrac{3}{2}$, $b = 2$, $d = \dfrac{5}{2}$, $S = 3$

Solución: Vamos que no lo sé.

Problema 9

Consideren todas las divisiones con sus términos enteros positivos, divisor 325 y el cociente igual al residuo. ¿Cual es número de divisiones posibles?

Solución:

En primer lugar, hagamos algunas consideraciones sobre la operación de división de enteros no negativos. Dados dos números enteros: de divisor, *d*, dividendo, *D*, obtenemos dos números, de cociente, *q*, y resto, *r*, tales que,

$D=qd+r$........ (1)

$0 \le r < d$ ..... (2)

Los números *D*, *d*, *q* y *r* son llamados términos de la división:

En el problema se ha dicho que:

(***a***) los términos de la división son enteros positivos,

(***b***) el divisor *d* es igual a 325 y

(***c***) el cociente *q* es igual al resto *r*.

Por las hipótesis (***a***) y (***b***), y por (2) tenemos que:

$0 < r < 325$, para $r \;\varepsilon\; \{1,2,3,4,\ldots\ldots,324\}$;

esto es, existen 324 **posibilidades** para *r*, o sea, por la hipótesis (c), $q=r$. Además de eso, por (1) y (b), tenemos que:

$D=rd+r = r(d+1) = 326r$

Luego, dado que $r\varepsilon\{1,2,3,4,\ldots\ldots,324\}$, tenemos que

$Q=r$, $D=326r$, $d=325$.

Concluimos que existen 324 divisiones distintas.

Solución: Problema y solución anónima, no la tengo, pero que la traduje del portugués les doy mi palabra

Problema 10

A no dudar que este es fantástico, cuando empecé a leerlo me pareció un clásico y formulero problema de física, pero me asuste con la condición, y comencé a pensar en infinitos y esas veleidades.

Dos hombres se mueven uno al encuentro del otro desde dos puntos *m* y *n* distantes 117 kilómetros. El primer hombre camina a una velocidad de 4 km/h., el segundo camina a 2 km/h, durante la primera hora, 2.5 km/h, durante la segunda hora, a 3 km/h, durante la tercera hora, y así sucesivamente. ¿Al cabo de que tiempo se encuentran?

Fuente: Olimpiada Regional de Matemática Santa Catarina Brasil- 1998 – Problema 6 Nivel 3

Solución fantástica

Este llega de fin de fiesta resuelto por mi amigo Goyo, con una solución interesante, obvie la solución en hoja de cálculo, porque la analítica me parece muy buena.

Hola Aldo:

Yo como no podía ser de otra manera he resuelto el problema 10 utilizando la hoja de cálculo. Te envío el adjunto hecho con Excel. La respuesta es que los dos caminantes se encontrarán al cabo de 13 horas

Aunque es "mas matemático" planteado como encontrar el valor de *n* tal que la suma de los *n* primeros términos de la progresión aritmética de razón 0,5 (que es lo que aumenta la velocidad del segundo caminante cada hora) y cuyo primer término es 6 (la suma de las velocidades de los dos caminantes durante la primera hora) De manera que la serie quedaría algo así como

$A=6;\ 6,6;\ 7;\ 7,5;\ 8\ \ldots$

La fórmula para la suma de los primeros *n* términos de una serie aritmética es:

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right).n$$

Y como en esta progresión tenemos que $a_n=a_1+d.(n-1)$ sustituyendo tenemos que $a_n= 6+ 0,5(n-1) \Rightarrow a_n=5,5 + 0,5n$

Con lo cual S_n lo podemos escribir como

$S_n = \left(\dfrac{(6+(5+0,5n))}{2}\right).n$ que nos queda

después de operar $S_n= 0,25n^2+5,75n$

Que igualándolo a la distancia que deben recorre 117 kilómetros, $0,25\,n^2 + 5,75\,n = 117$ y si resolvemos esa ecuación de segundo grado *n* puede ser -36 (lo cual no tiene sentido) ó $n=13$ como hemos visto en la hoja de cálculo bastante mas rápidamente

Un abrazo Aldo y ya sabes que aquí me tienes para ayudarte. Haces una fantástica labor. Saludos maestro.

Solución: Resuelto por Goyo Lekuona Muxika

Solución oficial:

Sea n el número entero de horas que cada uno caminará. Si ellos se encuentran después de esas n horas, entonces:

El primero anduvo: $4n$ kilómetros.

El segundo anduvo:

$$2+\left(2+\frac{1}{2}\right)+\left(2+2.\frac{1}{2}\right)+\ldots\left(2+(n-1).\frac{1}{2}\right)=$$

$$2n+\left(\frac{1}{2}+2.\frac{1}{2}+\ldots(n-1).\frac{1}{2}\right)=$$

$$2n+\frac{\left(\frac{1}{2}+(n-1).\frac{1}{2}\right).(n-1)}{2}=$$

$$2n+\frac{n.(n-1)}{4}=\frac{n^2+7n}{4}.$$

Asimismo, $4n+\frac{n^2+7}{4}=117$,

efectuando y resolviendo esta ecuación, nos da n_1 = -36 y n_2 = 13. Luego se encontraron a las 13 horas.

Nota del editor (o sea yo).- ¿Que sucede con la raíz negativa en la solución de la ecuación?. Interpretarla.

Solución: Resuelto por los proponentes de la prueba, traducción y nota de Aldo Gil C.

Bien amigos:

Con este número termina la primera etapa de nuestros problemas resueltos, la verdad que compartir todo esto con ustedes, ha sido de veras alentador, satisfactorio, creo que se ha hecho un buen trabajo (ustedes lo han dicho, yo no),y bueno creo que se merece un descanso, no mayor de 1 mes, y por allí volvemos con otras cosas y mas problemas, en fin no sé, en el ínterin se aceptan ideas, aportes, en fin lo importante es que nuestra revista latina siga cumpliendo las metas y mis sueños, que desde este punto del mundo algunas personas puedan tomar como útil este sencillo aporte, me da escozor cuando en la Patagonia un amigo me dice que los aplica en su escuela, o en la lejana España, México o Centroamérica (por nombrar solo algunos), esto... me llena de orgullo, y de hecho seguiremos en una segunda etapa.

Déjenme unas cortas vacaciones..... la chamba (trabajo) para hacer esto no es fácil, así que necesito el descanso.

Abrazos y suerte

Aldo Gil Crisóstomo

Lima-Perú