Problema 1

Empezamos por este problema extraído de la Revista Excalibur, japonesa (eso si los problemas están en ingles), bastante académico y formal el bicho sin necesidad de figura y como diríamos "a señas" nos dan la solución. Hummmm... interesante

Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares, demostrar que los puntos medios de sus lados y el pie de las perpendiculares trazadas a los lados opuestos desde los puntos medios están en un mismo círculo.

Fuente: Mathematical Excalibur – Volumen 1-Número 2- Problema 4

Solución:

Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que AC es perpendicular a BD, Sean E,F,G,H los puntos medios de AB, BC, CD, DA respectivamente. Por el teorema del punto medio EH, BD, y FG son paralelas así como lo son EH,BD y HG. Como AC es perpendicular a BD, $EFGH$ es un rectángulo. Por los tanto E,F,G,H son concíclicos (inscriptibles).

Sea M el pie de la perpendicular de E a CD, entonces $\angle EMG = \angle EFG = 90°$.. Entonces E,F,M,G,H están en un mismo círculo. En forma similar los otros pies de las perpendiculares están en el mismo círculo.

Solución: Independiente POR W.H. Fok.

Problema 2

Considerar el triángulo ABC, de circuncírculo k, centro O y radio R, y su incírculo de centro I y radio r. Otro círculo k_C es tangente a los lados CA,CB, en D y E respectivamente, y a su vez es internamente tangente a k. Demostrar que I es el punto medio de DE.

Fuente: Propuesto por España y no tomado en la 38th IMO.

Solución:

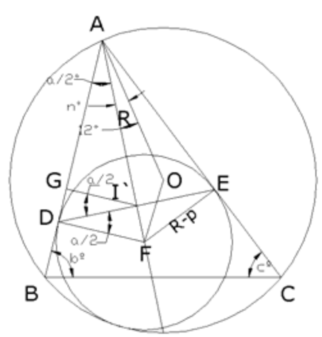
Sea F el centro de k_C y p su radio. Entonces F esta en la prolongación de AI. Ahora $FD=p$, así:

$AF = \dfrac{p}{sen\frac{\alpha}{2}}$. También $AO=R$, $OF=R-p$, y

$\angle FAO = n = \frac{1}{2}(b-c)$.

Aplicamos la ley de cosenos en AFO:

$OF^2 = AF^2 + AO^2 - 2.AF.AO.\cos n$; ó



$$(R-p)^2 = \frac{p^2}{sen^2\frac{a}{2}} + R^2 - \frac{2.R.p\cos(\frac{b-c}{2})}{2.sen\frac{a}{2}} : p \neq 0.$$

De aquí podemos obtener: $-2R + p = \dfrac{p}{sen^2\frac{a}{2}} - \dfrac{2.R\cos(\frac{b-c}{2})}{\cos(\frac{b+c}{2})}$;

ó $\dfrac{p\cos^2\frac{a}{2}}{sen^2\frac{a}{2}} = \dfrac{4.Rsen(\frac{b}{2}).sen(\frac{c}{2})}{sen\frac{a}{2}}$. Así:

$$p = \frac{4Rsen\frac{a}{2}\,sen\frac{b}{2}\,sen\frac{c}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{r}{\cos^2\frac{a}{2}} = FD.$$

Ahora sea DE que intercepte a AF en I`.

Entonces $DI` = DF\cos\frac{a}{2} = \dfrac{r}{\cos\frac{a}{2}}$

Sea G el pie de la perpendicular de $I`$a AB. Entonces :

$I`G = I`D.\cos\frac{a}{2} = \dfrac{r}{\cos\frac{a}{2}}.\cos\frac{a}{2} = r.$

Luego $I`$ coincide con I.

Solución: Resuelto por D.J. Smeenk, Olympiad Corner 172-traducido y adaptado por Aldo Gil.

Problema 3

¿Existe un entero positivo n tal que $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ es un número racional?

Fuente: Mathematical Excalibur – Volumen 3-Número 2- Problema 51

Solución:

Asumimos que existe un entero n tal que $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ = r sea racional.

Elevando al cuadrado y simplificando tenemos que: $\sqrt{n^2-1} = \dfrac{r^2-2n}{2}$ es también racional. Sin embargo, para $n>1$, si $\sqrt{n^2-1} = \dfrac{a}{b}$ para cualquier entero positivo a,b que no tengan factor común mayor que 1, entonces:

$a^2=b^2(n-1)^2$, lo cual implica que b también divide a a. Por lo tanto b debe ser 1.

Ahora para $n>1$

$n^2>n^2-1=a^2> (n-1)^2$, es imposible. Por lo tanto $a=1$, pero entonces

$\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} = \sqrt{2}$ es irracional.

Por lo tanto: no existe tal n.

Solución: Gary NG Ka Wing.

Problema 4

A veces es bueno elevarse de nivel con algunas cositas universitarias, y este es didáctico y su solución aun mas.

Cual es la derivada de x^x

Fuente: JMYRIAM- Lista Matracas Agosto 2006

Solución 1:

Aporte a la lista de parte de mi amigo Enzo Ignazi Hans, hecha como dice el " a vuelo de pájaro"

1.- Se trata de una función potencial - exponencial; es decir donde la base y el exponente son dos variables, y su derivada, obviamente no se puede aplicar:

$y = x^n$ (siendo "n" número entero, racional e irracional)

$y = a^x$

2.- Entonces nos queda calcular la derivada mediante logaritmos naturales primero:

$Ly = Lx^x = x\ L\ x$, y luego la derivo en cada miembro separadamente:

$y'/y = 1.\ Lx + x.\ 1/x = Lx + 1$

$y' = y\ (1 + Lx)$

$y' = x^x\ .(1+Lx)$

Solución 2:

Cuando varían base y exponente, lo más sencillo es la derivación logarítmica: Se toman logaritmos, se aplica la regla de la cadena y se despeja la derivada:

$y = x^x$

$Ln(t) = x*Ln(x)$

$\frac{y'}{y} = Ln\ (x) + x*1/x = Ln(x) + 1$

$y' = y(Ln(x) + 1)$

$y' = x^x.\ (Ln(x) + 1)$

Solución: Ignacio Larrosa-España

Problema 5

Aquí si hay análisis puro, y máximos y mínimos, es bastante interesante con una solución académica muy coherente y sobretodo analizando todas las posibilidades. Recuerdo que la propuesta indicaba la posibilidad del uso de calculadoras manuales más no computadora.

Determine el menor entero cuadrado perfecto y cuya representación decimal empiece con 2005.

Fuente: Problem of the Week -Problem No. 2 (Spring 2005 Series)

Solución:

El entero mas pequeño $N = x^2$ debe satisfacer: $2005 \times 10^n \leq x^2 < 2006 \times 10^n$ donde $n + 4$ es el número de dígitos en la representación decimal de N.

Examinaremos dos casos, cuando n sea par y cuando n sea impar.

Para $n = 2p$ (par)

$2005 \times 10^{2p} \leq x^2 < 2006 \times 102^p \Rightarrow 44,7772 \ldots x\ 10^p \leq x < 44,7883 \ldots \times 10^p$.

El menor valor de p para que x exista es $p = 2 \Rightarrow x = 4478$ y $N = x^2 = 20052484$.

Para $n = 2p + 1$ (impar)

$20050 \times 10^{2p} \leq x^2 < 20060 \times 10^{2p} \Rightarrow 141,598 \ldots \times 10^p \leq x < 141,633 \ldots \times 10^p$.

El menor valor de p para el cual x existe es $p = 1 \Rightarrow x = 1416$ y $N = x^2 = 2005056$.

Finalmente el menor valor es: 2005056.

Solución: (by Georges Ghosn, Quebec, edited by the Panel traducida por Aldo Gil C.

Problema 6

No es mi política poner juntos dos problemas de la misma referencia, pero joder que este vino bien coqueto, y con una solución plástica.

Sean h_1, h_2, h_3 las alturas de un triángulo y sea r el radio de su círculo inscrito. Encontrar el menor valor de $\frac{h_1 + h_2 + h_3}{r}$, en cualquier triángulo.

Nota del editor (o sea yo): En que triángulo se cumple que sea mínimo.

Fuente: Problem of the Week -Problem No. 4 (Spring 2005 Series)

Solución:

Sea S el área y a, b, c, los lados. Tenemos que: $h_1 = \frac{2S}{a}$, $h_2 = \frac{2S}{b}$, $h_3 = \frac{2S}{c}$.

También tenemos que $r = \frac{S}{p}$, donde $2p = a+b+c$. De aquí:

$\frac{h_1 + h_2 + h_3}{r} = (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}$. Entonces desde que:

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, tenemos que: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 6$

Por lo tanto el mínimo es 9.

El triángulo donde ocurre este mínimo es equilátero

Solución: by Daniel Vacaru, Pitesti, Romania; edited by the Panel, traducida por Aldo Gil C.

Problema 7

En un triángulo ABC ($AC=BC$) los puntos A_1,B_1 y C_1 son puntos medios de BC, AC y AB respectivamente. Los puntos A_2 y B_2 son puntos simétricos de A_1 y B_1 con respecto a AB. Sea M el punto de intersección de CA_2 y A_1C_1, y sea N el punto de intersección de CB_2 y B_1C_1. La intersección de AN y BM es llamado P. Probar que $AP=BP$.

Fuente: Winter mathematical Competition Russe – 2000 Problema 8.2

Solución:

Debido a que CC_1 es paralela a A_1A_2 y $CC_1=A_1A_2$, tenemos que $CC_1A_2A_1$ es un paralelogramo. Esto es, $AM_1=C_1M$. Pero $A_1B_1C_1$ es también un paralelogramo y en consecuencia el punto de intersección de BM y AC es B_1. De aquí P esta en la mediana BB_1. Análogamente P esta en la mediana AA_1. En el triángulo isósceles ABC las medianas AA_1 y BB_1 son de la misma longitud. Consecuentemente: $AP = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}BB_1 = BP$.

Solución: Los mismos de la competición, adaptación y traducción de Aldo Gil C.

Problema 8

Aquí en mi país cuando alguien se desvía de un tema ó conversación se dice que se va por la tangente, en este problema literalmente el que lo soluciona "se va por la tangente" y en una maniobra brillante resuelve el problema con propiedades trigonometrícas. Una belleza este problema y más aun su solución.

Si $x < y < z$, resolver: $\frac{2x}{1-x^2} = y; \frac{2y}{1-y^2} = z; \frac{2z}{1-z^2}$

Fuente: Propuesto por Kenneth Korbin, New York

Solución:

Sea $x= \tan a$, para algún $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

entonces el sistema de ecuaciones queda como sigue:

$$y = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} = \tan 2a,$$

$$z = \frac{2\tan 2a}{1-\tan^2 2a} = \tan 4a,$$

$$x = \frac{2\tan 4a}{1-\tan^2 4a} = \tan 8a.$$

Entonces: $\tan 8a = x = \tan a$

$\Rightarrow 8a = a + n\pi$ para un entero n,

$\Rightarrow a = \frac{n\pi}{7}$ para un entero n

Esto implica que para un entero n,

$y = \tan\left(\frac{2n\pi}{7}\right)$ y $z = \tan\left(\frac{4n\pi}{7}\right)$.

En consecuencia: $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$, restringimos n al conjunto (-3,-2,-1,0,1,2,3). Es fácil verificar que solo para n=-3 se cumple $x < y < z$. De aquí que la única solución es:

$$x = \tan\left(-\frac{3\pi}{7}\right) = -\tan\frac{3\pi}{7};$$

$$y = \tan\left(-\frac{6\pi}{7}\right) = \tan\frac{\pi}{7},$$

$$z = \tan\left(-\frac{12\pi}{7}\right) = \tan\frac{2\pi}{7}$$

Solución: Elsie Campbell,Dionea Bailey, traducción y adaptación Aldo Gil C

Problema 9

Este pícaro problema de algebra, a veces nos tienta a lanzarnos con todo de tal forma de ir despejando y eliminando variables y luego tener una ecuación larga y complicada, este sereno análisis acerca de la simetría, resolvió el problema en forma brillante. Aja!!!, cuidado con los apresuramientos.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x+y+z+t = 4 \qquad x^3+y^3+z^3+t^3 = 28$$

$$xy+yz+zx+t(x+y+z) = -1 \qquad x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+t^2(x^2+y^2+z^2) = 105$$

Fuente: Propuesto por Jose Luis Diaz-Barredo, Spain-Problem School Science-Problema 4885-2006

Solución:

Primero notamos que las cuatro ecuaciones son simétricas en las cuatro variables x,y,z,t. Esto es, si $(x,y,z,t) = (x_0,y_0,z_0,t_0)$, es una solución, entonces una de las 24 permutaciones de x_0,y_0,z_0,t_0 (digamos $(x,y,z,t) = (y_0,t_0,x_0,z_0)$) es también una solución.

Para empezar asumimos que dos de los valores desconocidos son aditivos inversos, por ejemplo: $z=-t$. La primera y la tercera ecuación se reducen a:

$x+y = 4$

$x^3 + y^3 = 28$

Para lo cual tenemos $(x+y)(x^2-xy+y^2) = 28$, de donde reemplazando tenemos que $x^2-xy+y^2= 7$, y de aquí es fácil deducir que $(x,y)=(y,x)$ $(3,1)$.

Sustituyendo en la segunda ecuación y verificando en la cuarta tenemos: $(t,z)=(2,-2)$ y $(-2,2)$. Dejamos al lector, señalar las 24 soluciones de las ecuaciones.

Solución: Resuelto por Jennifer Sible, Waynesburg Collage; adaptado y traducido por Aldo Gil C.

Problema 10

Este problemita mas que brillante nos muestra una identidad que no tenia en mis apuntes (puede que ustedes si), y la veo útil para este tipo de problemillas…

Probar que: $\cos 0º + \cos 20º + \cos 40º + \cos 80º = \dfrac{1}{2\cos 80º}$

Fuente: Propuesto por Kenneth Korbin, New York-Problem School Science-Problema 4864-2006

Solución:

Tenemos la siguiente identidad trigonométrica para todos los enteros *n*:

$$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots\cos n\theta=\frac{1}{2}+\frac{\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Esto es: $1 + \cos 20º + \cos 40º + \cos 60º + \cos 80º = \dfrac{1}{2}+\dfrac{\operatorname{sen} 90º}{2\operatorname{sen} 10º}$

$\operatorname{Cos} 0º + \cos 20º + \cos 40º + \dfrac{1}{2} + \cos 80º = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\cos 80º}$

$\operatorname{Cos} 0º + \cos 20º + \cos 40º + \cos 80º = \dfrac{1}{2\cos 80º}$

Solución: Resuelto por David Wlson-Salem; adaptado y traducido por Aldo Gil C.

Bien amigos, hemos llegado a nuestro número 24, y la verdad cada vez mas fascinado, debido a que me estoy obligando a rebuscar problemas por todo el mundo (por Internet, digo), y bueno es muy apasionante, y cada día se aprende algo nuevo, me entretiene mucho este tema, claro de pronto vamos a espaciar las entregas, me gustaría que hayan algunos aportes de parte de ustedes, para que la cosa sea mas ágil, y no se me vayan a aburrir poniendo yo solito todo. Veamos si vienen algunos aportes para agilizar los fascículos.

Abrazos y que lo disfruten, Aldo Gil Crisóstomo

OFF TOPIC

Se presento en la lista de Matracas la solicitud de la demostración de la ley de senos, y me pareció interesante ponerla aquí, siempre es bueno tener variantes de las demostraciones.

Sea una circunferencia de radio *r* y un triángulo inscrito en ella.

Demostrar que: $\dfrac{p}{\operatorname{sen} P}=\dfrac{Q}{\operatorname{sen} Q}=\dfrac{P}{\operatorname{sen} S}=2r$

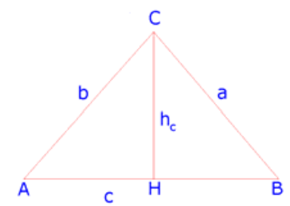
Solución:

Enunciado

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Demostración



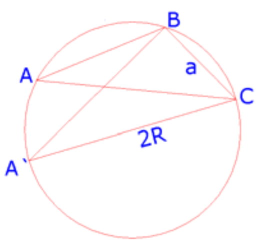
Dada la figura:

La altura h_c delimita dos triángulos rectángulos AHC y *BHC*.

$h_c=b \operatorname{sen} A$; $h_c=a \operatorname{sen} B$. De lo que sale que $b \operatorname{sen}A = a \operatorname{sen} B$, y por tanto, $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A}=\dfrac{b}{\operatorname{sen} B}$

Si hacemos un cálculo similar con la altura del vértice *A* resulta $\dfrac{b}{\operatorname{sen} B}=\dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$, por lo que podemos afirmar que: $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A}=\dfrac{b}{\operatorname{sen} B}=\dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$

Interpretación geométrica



La razón entre cada lado del triángulo y el seno del ángulo opuesto es constante y es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Dado un triángulo *ABC* y su circunferencia circunscrita de radio *R*, trazando el diámetro *CA′* y uniendo *A′* con *B* tendremos un triángulo rectángulo (el ángulo *B* abarca una semicircunferencia) *A′BC*. *A* y *A′* abarcan el mismo arco *BC*, por lo que *A′ = A*. Por la aplicación del teorema de los senos: $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A`}=\dfrac{2R}{\operatorname{sen} 90º}=2R$ y $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A`}=\dfrac{a}{\operatorname{sen} A}=2R$

Demostración por: Víctor vmherrero@yahoo.es de la lista Matracas