Problema 1

La diferencia de dos números enteros es 36, si la suma de la media aritmética y la media geométrica es 162. Hallar los números.

Fuente: 2º Practica de Aritmética - Academia Cesar Vallejo Lima-Mayo 1992

Solución:

Un agradecimiento al excelente aporte de Maria Sandra, que vale poner como solución, creo que las soluciones diversas enriquecen los problemas

Empezamos simbolizando los dos números como x y z. Como la diferencia es 36, podemos escribir $z - x = 36$

Como la suma de la media aritmética y la geométrica es 162, entonces

$\frac{x+z}{2} + \sqrt{x.z} = 162$. Despejando z de la primera ecuación se tiene que $z = x + 36$ y sustituyendo la z en la segunda ecuación se tiene:

$\frac{x+x+36}{2} + \sqrt{x.(x+36)} = 162$. Luego trabajando la expresión se tiene:

$x + 18 + \sqrt{x^2 + 36x} = 162$,

$\sqrt{x^2 + 36x} = 144 - x$, luego

$x^2 + 36x = (144 - x)^2$,

$x^2 + 36x = 20.736 - 288x + x^2$

$36x = 20\ 736 - 288x$ luego juntando las x se tiene : $324x = 20\ 736$ y finalmente $x = 64$ con lo que deducimos que $z = 100$.

Resuelto por: María Sandra Foffano

Solución oficial:

Sabemos que: $m_a + m_g = 162$, para dos números que pertenecen a los enteros.

$\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} = 162$

$\underbrace{a + b + 2\sqrt{a}\sqrt{b}} = 324$

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = 18^2$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 18$ ....(I)

a-b = 36 ....(II)

Tanteamos en (I) y (II) y obtenemos $a = 100$ y $b = 64$

Solución: Solucionario de la Academia

Problema 2

Suma de Cuadrados y Cubos

$3^2 + 4^2 = 5^2$ y $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$

¿Hay algún otro conjunto de tres números (x,y,z) naturales tal que $x^2 + y^2 = z^2$ y $x^3 + y^3 + z^3$ sea un cubo perfecto, además de los múltiplos de (3,4, 5) ?

Fuente: Elio Rodriguez Marquina – Matracas – 25 Agosto 2006

Solución 1:

Elio: No te doy la respuesta, sino un elemento para pensarla...(ya que los otros 2 que te conteste hace un tiempo no sé si te sirvieron...)

Los (x,y,z) que son solución de $x^2 + y^2 = z^2$ son de la forma: $(x,y,z) = (2pq;\ p^2 - q^2;\ p^2 + q^2)$ donde p y q son 2 números naturales coprimos entre si, de paridad opuesta y $q < p$ (Las famosas ternas pitagóricas!!!)

Bueno, trabaja sobre esto y creo que llegaras a la respuesta.

Solución 2:

Yo prefiero esta otra parametrización de las ternas pitagóricas:

$x = u*v$

$y = (v^2 - u^2)/2$

$z = (v^2 + u^2)/2$

Donde $v > u \geq 1$ deben ser impares y primos entre si.

Por ejemplo, para $u = 1$ y $v = 3$, se obtiene la más conocida de todas (x, y, z) = (3, 4, 5).

Entonces,

$x^3 + y^3 + z^3 = t^3 \Rightarrow v^2(u + v)^2(3u^2 - 2uv + v^2)/4 = t^3$

El cuatro del denominador se cancela siempre, pues tanto el segundo factor, que además está elevado al cuadrado, como el tercero son pares.

Como $mcd\ (u,\ v) = 1$, tenemos que $mcd\ (v,\ u + v) = 1$, así como $mcd\ (v,\ 3u^2 - 2uv + v^2) = 1$, salvo que v sea múltiplo de 3.

Para que esta expresión pueda ser un cubo perfecto, todos los factores primos deben aparecer al cubo. Deducimos de ello que v debe ser necesariamente una potencia de 3. Precisamente, para $v = 3$ y $u = 1$ tenemos la solución conocida, previsiblemente la única.

Quedaría por ver que para $v = 3^h$, con $h > 1$ no hay otras soluciones. Debería ser $2h + 1 = 0\ (mod\ 3) \Rightarrow h = 1\ (mod\ 3)$ $\Rightarrow h = 3k + 1$

Con lo que las únicas posibilidades que tenemos son para $v = 3^{3k+1}$, $k > 0$.

Para $k = 1$ .. 5 no hay solución, y supongo que para valores mayores de k tampoco. De todas formas, quizás puedan encontrarse fácilmente otros razonamientos para excluirlo.

Solución: Ignacio Larrosa Cañestro

Problema 3

Cuantos son los enteros positivos de tres dígitos, es decir, de la forma $\overline{abc}$, con a y c no nulos, tales que $\overline{cba}$ es múltiplo de $\overline{abc}$?

Fuente:Listra Snark Año 1998-Enero

Solución:

Sea: $cba = abc \cdot d$

Es fácil ver que d es de una cifra, es un dígito.

Es fácil ver que d no es cero.

Es fácil ver que d puede ser 1, y entonces los números de 3 cifras palíndromos, son los buscados.

Pero d puede ser mayor que 1.

Siempre se debe cumplir que $d.a=c<10$.

Y que $c.d = a \ (mod\ 10)$

Si $d \geq 5$, entonces $a=1$. Pues siempre se debe cumplir que $a.d \leq c < 10$.

Si $d \geq 5$, entonces $a=1$, entonces $d.c = 1 \ (mod\ 10)$.

Si $d=9$, entonces $a=1$, $c=9$ (pues $a.d \leq c<10$, solo puede dar $a=1, c=9$). Se cumple que $d.c = 9*9 = 81 = 1 \ (mod\ 10)$.

Se debe cumplir que $d.b+8 = b$ (no debe haber acarreo). *IMPOSIBLE*! Tonche, d no puede ser 9.

Si $d=8$, entonces $a=1$, $c=8$ ó 9. Pero entonces $d.c <> a \ (mod\ 10)$. Tonche, d no puede ser 8.

Lo mismo puede decirse para $d=7$ ó $d=6$.

Si $d=5$, entonces $a=1$. Pero $c.d$ dará 0 ó 5 (mod 10). No sera $d=5$.

Si $d=4$, entonces $a=1$ o 2. No puede ser $a=1$, porque $d.c$ es par. Si $a=2$, entonces para que $c.d = a \ (mod\ 10)$, será $c=3$ ó $c=8$. No puede ser $c=3$, porque debe ser $d.a \leq c$. Será $c=8$. Entonces $cd = 32$. Será $b.d+3=b$ sin llevarse nada. No puede ser. Entonces d no puede ser igual a 4.

Si $d=3$, entonces $a=1$ ó 2 ó 3.

Si $a=1$, debe ser $d.c = 1 \ (mod\ 10)$. Única posibilidad: $c=7$. Entonces $d.a+x = 7$. x es el acarreo de $d.b+y$. $y=2$ es el acarreo de $d.c$. Pero entonces, $x=4$. Entonces $d.b+2 = 40+b$. Entonces $2b+2=40$. Imposible $d=3$ y $a=1$.

Si $a=2$, debe ser $d.c =2$ (mod 10). Única posibilidad: $c=4$. Pero debe ser $d*a \leq c$.

Tonche, imposible $d=3$, $a=2$.

Si $a=3$, debe ser $d.c = 3 \ (mod\ 10)$. Única posibilidad: $c=1$. Pero debe ser $d*a \leq c$.

Tonche, imposible $d=3$, $a=3$.

Si $d=2$, entonces $a=1$ ó 2 ó 3 ó 4.

Pero $d.c = a \ (mod\ 10)$. Pero $d.c$ será par. Entonces, a debe ser par. Será $a=2$ ó $a=4$.

Para que $d.c = a \ (mod\ 10)$, deberá ser $c=1$ o 6, si $a=2$, o $c=2$ o 7, si $a=4$. En ambos casos, comprobando que $d.a \leq c$, solo queda como posibilidad:

$a=2$, $c=6$

Entonces, $d.c = 12$. $d.b+1 = b+20$. $d.a+2=6$.

Sera $b=19$. Imposible.

Únicas soluciones: abc y cda son iguales y palíndromos (capicúas)

Problema 4

Es bueno cambiar de aires sin salir de nuestros limites y ahora apreciaremos unos problemas planteados en Croacia, en el 2003, problemas de aplicación de fórmulas pero interesantes en su concepción, a fin de ir afinando y dando aplicación a las formulas convencionales, y trabajos con algebra y geometría combinados

Las longitudes de los lados de un triángulo ABC son $a=b-\frac{r}{4}$, $c=b+\frac{r}{4}$, donde r es el radio del circulo inscrito. Determinar las longitudes de los lados del triángulo en función de r.

Fuente: Croatian Math. Society Comppetition Junior Level – Abril 2003 – Problema 1

Solución:

Sea $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$. De la fórmula para hallar el área del triángulo tenemos:

$sr = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Elevando al cuadrado tenemos: $sr^2=(s-a)(s-b)(s-c)$

Insertando las expresiones para a, b, c tenemos:

$\frac{3}{2}br^2 = (\frac{b}{2}+\frac{1}{4}r)(\frac{b}{2})(\frac{b}{2}-\frac{1}{4}r)$, lo cual implica que: $b^2=\frac{49}{4}r^2$; esto es, $b=\frac{7}{2}r$, entonces $a=\frac{13}{4}r$ y $c=\frac{15}{4}r$.

Solución: Solución oficial, traducción y adaptación por Aldo Gil C.

Problema 5

Este problemita de aquí hace combinaciones de Aritmética y aplicación de la clásica fórmula de Herón, interesante porque permite hacer análisis casuísticos, lo cual le da complemento y rigurosidad a la demostración, sin perder el encanto natural de la resolución del problema, por eso lo escogí.

Considerar un triángulo ABC cuyos lados tiene longitudes cuyas dimensiones son números primos. Probar que el área del triángulo no puede ser un número entero.

Fuente: Croatian Math. Society Comppetition Junior Level – Mayo 2003 – Problema 1

Solución:

Por la fórmula de Herón, el cuadrado del área del triangulo con lados *a, b, c* es:

$A^2 = s(s-a)(s-b(s-c)$, donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Si nosotros tenemos que $p=a+b+c$, esta puede ser escrita como: $16A^2 = p(p-2a)(p-2b)(p-2c)$.

Puesto que el lado izquierdo es par es, *p* debe ser par. Aquí surgen dos posibilidades:

Caso 1: Todos los números *a,b,c* son pares.

Debido a que *a,b,c* son pares y primos, no queda otra alternativa que $a=b=c=2$.

Pero esto nos da $A=\sqrt{3}$, la cual no es un entero.

Caso 2: Uno de los números *a,b,c* es par, y los otros dos son impares.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $a=2$ y que tanto *b* como *c* son impares. Si $b \neq c$, podemos hacer $b<c$. Entonces $c-b \geq 2$; esto es $c \geq b+2 = b+a$. Pero esto es una contradicción en la desigualdad de los lados de un triangulo. De aquí $b=c$. Ahora $p=2+2b$, y tenemos:

$16A^2 = p(p-4)(p-2b)^2 = (2+2b)(2b-2).4$, y al efectuar nos da: $b^2 - A^2 = 1$; esto es $(b-A)(b+A)=1$.

Pero debido a que $b+a \geq 2$, esto no es posible.

Solución: Solución oficial, traducción y adaptación por Aldo Gil C.

Problema 6

Un poquito de logaritmos no nos cae mal, a propósito que estuve revisando algo de la W.J. Blundon del Department of Mathematics and Statistics Memorial University of Newfoundland , interesante con pruebitas ligeras pero candorosas. Ali va.

Resolver $\log_2(9-2^x) = 3-x$

Fuente: The Twenteth W.J Blundon – Math Contest– Problema 1

Solución:

$\log_2(9-2^x) = 3-x$. Por definición de logaritmo tenemos que $9-2^x = 2^{3-x}$

Por propiedades de la potenciación podemos escribir el segundo miembro como: $9-2^x = \frac{2^3}{2^x}$

Pasando el denominador del segundo miembro y aplicando distributiva se tiene que:

$2^x 9 - 2^{2x} = 8$ y llamando $z = 2^x$ y luego $z^2 = 2^{2x}$ se tiene la ecuación cuadrática : $-z^2 + 9z - 8 = 0$ cuyas soluciones

son $z = 8$ y $z = 1$, luego $8 = 2^x$ implica que $x = 3$ y $1 = 2^x$ implica $x = 0$

Las soluciones problema 6 entonces resultan ser $x = 0$ y $x = 3$.

Resuelto por: María Sandra Foffano

Solución oficial:

Usando la definición de logaritmo, tenemos:

$\log_2(9-2^x) = 3-x$

$9-2^x = 2^{3-x}$

$9-2^x = 8.2^{-x}$

$9.2^x - 2^{2x} = 8$

$(2x)^2 - 9.2^x + 8 = 0$

$(2^x-1)(2^x-8)=0$

$2^x = 1$ ó $2^x = 8$

$x=0$ ó $x=3$

Verificando las soluciones en la ecuación original, vemos que ambas son válidas.

Solución: Solución oficial, traducción y adaptación por Aldo Gil C.

Problema 7

Este problemita lo encontré hoy domingo mientras husmeaba mis archivos de computadora, y su simple solución me ha fascinado y se los paso para que lo disfruten, es sencilla.

Sea *ABC* un triángulo rectángulo con $\angle A = 90°$. Sea *P* un punto en la hipotenusa *BC*, y sean *Q* y *R* los respectivos pies de las perpendiculares de *P* sobre *AC* y *AB* respectivamente. ¿Para que posición de *P; QR* es mínimo?

Fuente: Ninguna oficial solo lo tengo como número 145

Solución:

PQAR, es un cuadrilátero con ángulos rectos, por lo tanto es un rectángulo, De aquí deducimos que las diagonales *QR* y *AP* son iguales, la longitud de *QR* es minimizada cuando *AP* es mínima, y esto ocurre cuando *P* es el pie de la perpendicular de *A* a *BC*.

Comentario. P puede ser ubicado como: $PB : PC = AB^2 : AC^2$.

Solución: Solución oficial, traducción y adaptación por Aldo Gil C.

Problema 8

Este es uno de esos problemas que a veces nos dejan sinsabor en la boca, pero es una brillante demostración. Sobretodo porque yo no veía por donde empezar, y la solución tiene mucho de lógica, ninguna pérdida de generalidad y un buen manejo del algebra

Sean *a, b ,c* números reales cuya suma es cero. Probar que:

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7} = \left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)$$

Fuente: Saint Petersburg Contests 1965-1984 – Problema 19

Solución:

Sean a, b, c las raíces de $x^3+qx-r=0$, y sean $S_k=a^k+b^k+c^k$. Entonces

$S_1=a+b+c=0$ y $S_2=a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=-2q$.

Ahora tenemos:

$S_3+qS_1-3r=0 \Rightarrow S_3=3r$

$S_4+qS_2-rS_1=0 \Rightarrow S_4=2q^2$

$S_5+qS_3-rS_2=0 \Rightarrow S_5=-3qr-2qr=-5qr$.

$S_7+qS_5-rS_4=0 \Rightarrow S_7=5q^2r+2q^2r=7q^2r$

Entonces: $\frac{S_7}{7}=q^2r=\frac{S_5}{5}\cdot\frac{S_2}{2}$

Solución: Michael Bataille, Francia; traducción y adaptación por Aldo Gil C.

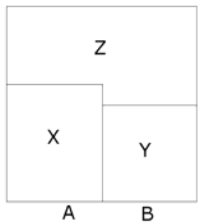
Problema 9

En una nueva página de AJIRA (asociacion dejuegos de ingenio de la república argentina) http://ajirarn.guslav.org.ar

Aparece este problema, de paso vamos publicitando la página para que tenga mayor difusión y pueda verse acrecentados los enigmas allí puestos y podamos divertirnos más.

El problema dice así:

Damián posee la parcela X. Ariel es dueño de la parcela Y, que es menor que X. Ambas miden de lado una cantidad entera de Km. (en plural, o sea, más de un kilómetro). Las dos son cuadradas y forman parte de un campo mayor, también cuadrado. Damián y Ariel deciden comprar la parte Z repartiéndosela en partes iguales. Entonces uno de ellos comenta: mi nueva parcela, (la parte de Z), no es cuadrada, pero, su superficie en Km. cuadrados es igual a la superficie de un cuadrado. ¿Cual es la cantidad mínima de Km. que puede tener el lado $A + B$?



Fuente: AJIRA trasmitida amablemente por Pablo Sussi – Lista Snark

Solución:

Veamos, allá va mi solución:

Como $A>B$ tenemos que $A=B+C$, donde A, B y C son números enteros ($B>1$ y $C>0$)

Así pues:

$X = (B+C)^2 = B^2 + 2BC + C^2$

$Y = B^2$

$X + Y + Z = (2B+C)^2 = 4B^2+4BC+C^2$

De donde $Z = 2B^2 + 2BC$

Pero sabemos que $\frac{Z}{2}$ (= $B^2 + BC$) es un cuadrado perfecto tal que $2B+C$ es mínimo.

Cogemos la lista de cuadrados (1, 3, 9, 16, 25, ...) y vayamos descartando:

1 y 3 quedan descartados porque $B^2 + BC$ como mínimo es 6 (recuerden que $B>1$ y $C>0$)

Con 9 tenemos que tiene que ser $B=2$ para no pasarnos y ningún C cuadra (1 y 2 se quedan cortos y 3 se pasa)

Con 16 tenemos que B puede ser 2 ó 3. Con 2 tenemos que C da corto con 1, 2, 3, 4 y 5 y se ajusta con $C=6$ (así $B^2 + BC = 2^2 + 2*6 = 16$)

Ahora hay que comprobar que $B=2$ y $C=6$ es mínimo para $2B+C$ y para ello basta con mirar que no haya ninguna combinación de Cs y Bs tal que sea cuadrado perfecto y da una suma menor a 10.

Para $B=2$ está claro que no. Para $B=3$ basta con comprobar que para C igual a 1, 2 o 3 B^2+BC no es un cuadrado perfecto. (Respectivamente 12, 15 y 18 que no son cuadrados perfectos)

Para $B=4$ tan sólo hay que comprobarlo con C igual a 1 que da 20 y por lo tanto tampoco funciona.

La solución al problema es 10.

$A = 8$

$B = 2$

$X = 64$

$Y = 4$

$Z = 32$

Espero que esté suficientemente claro, en todo caso estaré atento para resolver cualquier duda (ó para arreglar cualquier fallo).

Solución: Carlos Luna Mota – Lista Snark

Problema 10

En un viejo libro, de páginas oxidadas y cansadas de tanto guardar las letras y los números, me encontré este problemita, tomado allá por 1929, en una prueba para Ingenieros Industriales de España.

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$\sqrt[x]{x+y} = 2$

$(x+y).3^x = 279936$

Solución:

De la primera ecuación se deduce que $2^x=x+y$

Reemplazamos en la segunda y entonces $2^x.3^x=279936$

$6^x = 279936$. De donde $x = 7$

Resuelto por:Pablo Adrián Sussi

Solución oficial:

De la primera ecuación deducimos $x+y = 2^x$, que sustituido en la segunda ecuación y descomponiendo $279936 = 6^7$

Luego tenemos: $2^x.3^x = 6^x = 6^7$,

de donde $x = 7$

$(7+y).3^7 = 2^7.3^7$, $7+y = 128 \Rightarrow y = 121$

Fuente: Tomado de Mil problemas de Aritmética y Algebra – Mataix Plana – Problema 638

Las soluciones y aportes valiosos de Maria Sandra y Pablo Adrián, le han dado un toque de sabor internacional al asunto. Esperamos seguir así.

Abrazos

Aldo