Problema 1

Se tiene una balanza de dos platillos donde en uno de los brazos se tienen 38 objetos *A* de 35 gramos cada uno y en el otro 77 objetos *B* de 10 gramos cada uno. ¿Cuántos objetos deben intercambiarse para que ambos platillos tengan igual peso?

Fuente: Examen de Admisión Universidad Católica – Lima - 1994

Solución:

Para que cada uno de los platillos tenga igual peso, cada uno debe pesar:

$$\frac{38.25+77.10}{2}=\frac{1720}{2}=860 \text{ gramos}$$

En cada intercambio *A* disminuye con respecto a *B* en 25 – 10 = 15 gramos.

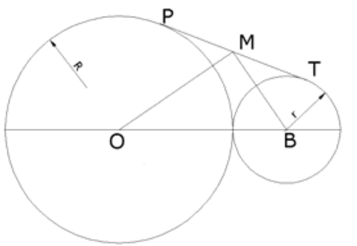
El número de intercambios será:

$$\frac{950-860}{15}=6.$$

Solución: Solucionario (después del examen, obvio) Diana Barredo – España – Ciudad de León

Problema 2

De la figura calcular el área del triángulo *OMB*, siendo *M* punto medio de *PT*, *R*=9, *r*=4 (*P* y *T* son puntos de tangencia)

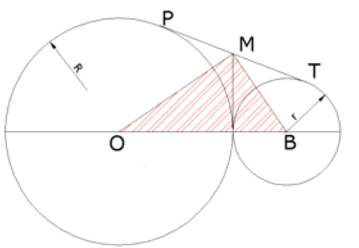


Solución:

De la figura *R*=9 y *r*=4, y si trazamos la perpendicular a *OB*, vemos que es la tangente común de las circunferencias, luego: *PM = MT*

Pero por propiedad $PT=2\sqrt{Rr}$. Luego: *PT*= $2\sqrt{9.4}$ =12, de donde la altura es 6.

El área del triángulo será: $\frac{(9+4).6}{2}$ =39 u^2



Problema 3

Pepito se escapo de su casa y cuando ha dado 70 pasos, sale detrás de el su papa y cuando este ha dado 60 pasos, sale detrás de el la mama (la verdad no me explico como en una situación difícil, alguien este contando los pasos, pero en fin….) la cual

avanza a la misma velocidad que el papa y con la misma longitud de paso. Se sabe que cuando Pepito da 5 pasos, su papa da 4 pasos, pero 9 pasos del papa equivalen a 13 pasos de Pepito. ¿Cuántos pasos habrá dado la mama cuando se encuentra al papa que trae cargando a Pepito?

Fuente: Recopilado por Aldo Gil de alguna parte, y puesto en Matracas alguna vez..

Solución:

El padre tiene que descontarle 70 pasos de Pepito, pero cuando el papá da 36 pasos (que equivalen a 52 de Pepito), $36.\frac{13}{9}$ =52 Pepito da 45, o sea que cada 36 pasos de su papá le descuenta 7 de los de Pepito.

Se necesitan entonces 360 pasos del padre para descontarle los 70 de Pepito.

La madre sale cuando el padre hace 60, quiere decir que hace 300, cuando el padre alcanza a Pepito, y están a una distancia de 60 pasos. Sin contar el tiempo que el padre tarda en levantar a Pepito y arrancar la vuelta, se encontraría con la madre en el paso 330 de ella, el 390 de él.

Solución: Pablo Adrián Sussi en Matracas

Problema 4

Factorizar: $x^5 + x + 1$

Solución:

Comentario: mas allá de la solución, siempre es bueno tener en cuenta los artificios ingeniosos utilizados en factorización, es decir conociendo los casos principales de factorización, se puede factorizar casi cualquier cosa.

Se factoriza del siguiente modo:

$x^5 + x + 1 = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1$ … se le suma y resta x^2

$x^5 + x + 1 = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$ …se factoriza y agrupa convenientemente

$x^5 + x + 1 = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$ ….se aplica una diferencia de cubos

$x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2(x - 1) + 1)$ …se factoriza y se opera

$x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$

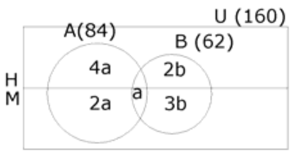
Solución: David Morales – Huancayo Perú – 31 Enero 2006 – Lista Matracas

Problema 5

En una encuesta a 160 personas sobre las preferencias de leer las revistas *A* y *B* fue lo siguiente: el número de personas que les gusta *A* y *B* es ¼ de los hombres que solo les gusta *A* y la mitad de las mujeres que solo les gusta *A*. El número de hombres que solo les gusta *B* es 2/3 del número de mujeres que solo les gusta *B*. El número de personas de *A* es 84 y el número de personas de *B* es 62. Hallar el número de personas que no les gusta A ni B.

Fuente: Práctica de Aritmética - Academia Cesar Vallejo Lima-Mayo 1993

Solución:



$n(A \cup B) = 134$

Número de personas que no les gusta *A* ni *B*: 26

Solución: Solucionario de la Academia

N.R. Como vemos es una simple solución en cuanto hayamos planteado bien el diagrama de Gantt correspondiente. Es lo mejor para resolver este tipo de problemas.

Problema 6

Si tomamos todos los números de 9 dígitos que contienen los 9 dígitos diferentes (del 1 al 9) y los sumamos ¿cual será el resultado final?

Fuente: Pablo Adrian Sussi – Snak – Agosto 2006

Solución 1:

A mí me da el siguiente resultado: 201.599.999.798.400 aunque no sé si estaré equivocado.

Me he basado en un algoritmo que he hallado y creo que vale pero sólo lo he probado hasta los 4 dígitos.

*1. (1) * (1) * (1) = 1*

*2. (1) * (11) * (1+2) = 33*

*3. (1*2) * (111) * (1+2+3) = 1.332*

*4. (1*2*3) * (1111) * (1+2+3+4)= 66.660*

De lo cual deduzco que:

9. (1*2*3*4*5*6*7*8) * (111111111) * (1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 201.599.999.798.400

Solución: Marcelino Fernández- Lista Snark

Solución 2:

Aquí Pablo "tecnifica" y prueba que el algoritmo usado por Marcelino es correcto

Efectivamente, la explicación es la siguiente, hay *9!* números distintos, como son 9 dígitos hay *9!/9* o sea *8!* de cada número en cada columna, la suma de los 9 números da

Olimpiadas Internacionales
Problemas Resueltos Nº 22 2006

45 por lo tanto cada columna suma *8!.45*, y todas las columnas suman lo mismo, como son 9 columnas se multiplica por 111.111.111. De aquí:

*8!*45*111111111* da *201.599.999.798.400*

Solución: Pablo Adrián Sussi- Lista Snark

Problema 7

Sin tratar de ser irreverente y con todo respeto se me antojo este problemita para matracas allá por el 200... no me acuerdo.

Cierto día Jesús en la playa con los apóstoles, reparte entre ellos el producto de la pesca que fueron 108 peces.

A Juan le toco *a + b* peces.

A Judas le toca *a x b* peces (siempre el mas beneficiado y luego lo jodió)

A Pablo le toca *a-b* peces.

A Pedro le toca *a/b* peces (seguro que estaba gordito). Obviamente que los peces fueron repartidos en cantidades enteras. ¿Cuál es la mayor cantidad que puede recibir Pablo?

Solución 1:

Si $b=0$ la división $\frac{a}{b}$ es indeterminada, b=1, para que se le reste lo mínimo posible y tenga la máxima cantidad de peces

$a+b + a.b + a\text{-}b + \frac{a}{b} =$

$2a + a.b + \frac{a}{b} = a.(2+b+\frac{1}{b})=108$

a.(2+1+1)=108

4a=108

a=27

Juan:28

Judas:27

Pablo:26

Pedro:27

Solución 2:

Supongo que Jesús se quedo sin peces: *a* y *b* son enteros, y $b \le a$.

Tenemos:

$(a + b) + (a - b) + a.b + \frac{a}{b} - 108 = 0$

reescribimos la anterior igualdad:

$2.a + a.(b + \frac{1}{b}) - 108 = 0 \Leftrightarrow 2.a.b + a.(b^2 + 1) - 108.b = a.\ b^2 + (2.a - 108).b + a = 0.$

El discriminante de esta ecuación de segundo grado es

$(2.a - 108)^2 - 4.a^2 = 108^2 - 4.108.a \ge 0$

$108 \ge 4.a \Leftrightarrow a \le 27.$

Como $a = 27$, $b = 1$ son una solución al problema, Pablo puede recibir como máximo 26 peces (y en este caso, Judas no sale tan beneficiado como se esperaba, ni Pedro esta tan gordo).

Solución: José L. Sánchez Garrido

Problema 8

Factorizar el siguiente polinomio: $P_{(a,b,c)}=8(a+b+c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3-(a+c)^3$

Solución:

Seguramente lo primero que se nos ocurre es desarrollar el cubo de la suma de dos y tres números, etc. etc.,… y luego comenzar a agrupar, y como hay signos negativos simplificar, y al final equivocarse en un signo, en fin todas "técnicas" memorísticas y laboriosas que nos enseñan en el cole, pero mejor vean esta solución:

$P_{(a,b,c)}=(2a+2b+2c)^3-(a+b)^3-(b+c)^3-(a+c)^3$

Hacemos $a+b=x$, $b+c=y$, $a+c=z$,

….**Brillante!!**

$P=(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$

$P=x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)-x^3-y^3-z^3$

Eliminando y reemplazando:

$P_{(a,b,c)}=3(a+2b+c)(a+b+2c)(2a+b+c)$

Realmente me gozo con estas cositas y detalles, no los encuentro en ningún libro, a veces los ponen a secas y no se detienen a gozar del placer de una solución ingeniosa. Ahhhh!!!

Problema 9

En una división, si dividimos entre 15 al dividendo y entre 7 al divisor, el cociente queda disminuido en 8 unidades mientras que el residuo queda dividido entre 15. Hallar el cociente de dicha división.

Fuente: Práctica de Aritmética - Academia Cesar Vallejo – Lima - 1995

Solución

Aplicamos la formula general de la división: $D=d.q + r$…………………….…..(1)

Donde D: dividendo, d:divisor, q:cociente y r: residuo.

Luego planteamos lo que nos dan como condición:

$$\frac{D}{15}=\frac{d}{7}(q-8)+\frac{r}{15} \quad \text{…………………(2)}$$

Acomodamos la ecuación (2):

$$\frac{D}{15}=\frac{15.d}{15.7}(q-8)+\frac{r}{15}$$

De aquí reduciendo tenemos:

$$D=\frac{15.d}{7}(q-8)+r \quad \text{…………………(3)}$$

$(1)=(2)$

$$d.q=\frac{15.d}{7}(q-8) \Rightarrow 7.d.q=15.d(q-8)$$

$$\Rightarrow 7.q=15.q-120 \Rightarrow q=15$$

El cociente es 15

Solución: Aldo Gil Crisóstomo

Problema 10

Calcular: $J=x^{1990}-x^{-1990}$

Si: $x^2-x+1=0$

Solución:

Esta es monumental…..

De la condición: $x^2-x+1=0$

Podemos escribir:

$(x+1)(x^2-x+1)=0.(x+1)$*… que buena…*

De donde: $x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1$.

En $J=x(x^3)^{663}-x^{-1}(x^3)^{664}$

Reemplazando: $J=x(-1)^{663}-\frac{1}{x}(-1)^{664}$

$J=-x-\frac{1}{x} \Rightarrow J=-(x+\frac{1}{x})$

Otra vez del dato: $x^2+1=x \Rightarrow x+\frac{1}{x}=1$

$\therefore J=-1$

Amigos, creo que termine este fascículo muy motivado, no se como les irá a ustedes, ó esto es lindo ó yo estoy loco de remate, pero cada vez que me pongo en el micro rumbo al trabajo, hojeando material para ustedes, me encuentro cada cosa, unas muy formales por supuesto y esa no las pongo, pero algunas irreverencias como las de hoy , pues… joder que si dan ganas de revolcarlas en el fascículo, dicen que cuando uno comienza estas faenas, a poco que se va aburriendo y pierde el entusiasmo, pero a mi me esta pasando al revés….

Hasta el próximo número…totalmente seguro

Un abrazo

Aldo Gil Crisóstomo