Problema 1

Halle analíticamente $Df \cap Rf$, si f es una función con la regla de correspondencia:

$$f(x) = \sqrt{x+8} + \sqrt{x-4}$$

Fuente: Olimpo Matemático: Concurso de becas Nº 2-Lima Perú–Problema 4-Recopilado por Aldo Gil

Solución:

a) El Dominio de la función son los valores de "x" para los que existe imagen, es decir, aquellos valores que hacen ambos radicandos **NO** negativos:

$$x+8 \geq 0 \iff x \geq -8$$

$$x-4 \geq 0 \iff x \geq 4$$

$$Df = \{x \in \Re : \; x \geq 4\} = [4, \infty)$$

b) El Rango de la función es el conjunto de imágenes de dicha función. Como dicha función está definida en un intervalo, y es continua y creciente en todo su dominio:

$$Rf = f([4,\infty)) = [f(4), \lim_{x\to\infty} f(x)) = [2\sqrt{3}, \infty)$$

La intersección de ambos conjuntos es:

$$Df \cap Rf = [4,\infty) \cap [2\sqrt{3}, \infty) = [4,\infty)$$

Nota: El crecimiento de la función viene garantizado por ser la función derivable, en todo su dominio, con derivada estrictamente positiva.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+8}} + \frac{1}{2\sqrt{x-4}} > 0$$

Solución: Diana Barredo – España – Ciudad de León

Problema 2

Representar el número $\sqrt[3]{1342\sqrt{167}+2005}$, de tal manera que contenga suma, restas, multiplicaciones y como máximo raíces cuadradas.

Fuente: Problems from Final round National Olympiad-Estonian 2004/2005 – Problema 2

Solución:

Primero aislamos los términos divisibles por *167*:

$1342\sqrt{167} + 2005 = 1336\sqrt{167} + 2004 + 6\sqrt{167} + 1 = 8.167\sqrt{167} + 12.167 + 6\sqrt{167} + 1.$

Segundo, representar el resultado en la forma de:

$1342\sqrt{167} + 2005 = (2\sqrt{167})^3 + 3\text{-}(2\sqrt{167})^2 + 3.(2\sqrt{167}) + 1 = (2\sqrt{167}+1)^3$

De aquí: $\sqrt[3]{1342\sqrt{167}+2005} = 2\sqrt{167}+1$

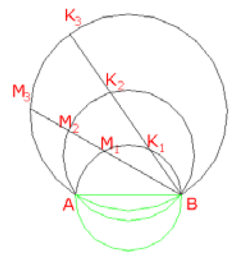
Resuelto: Estonia y traducido por Aldo Gil

Problema 3

Tres arcos circulares w_1, w_2, w_3 con puntos comunes en A y B están en el mismo lado de AB; w_2 están entre w_1 y w_3. Dos rayos que parten de B interceptan estos arcos en M_1, M_2, M_3 y K_1, K_2, K_3 respectivamente. Probar que: $\frac{M_1M_2}{M_2M_3} = \frac{K_1K_2}{K_2K_3}$.

Fuente: Mathematical Competition Baltic Way 2004 – Problema 20

Solución:



De los ángulos inscritos tenemos: $\angle AK_1B = \angle AM_1B$, $\angle AK_2B = \angle AM_2B$. De aquí deducimos que: $AK_1K_2 \approx AM_1M_2$, así: $\frac{K_1K_2}{M_1M_2} = \frac{AK_2}{AM_2}$ ....(I)

En forma similar : $AK_2K_3 \approx AM_2M_3$, así:

$\frac{K_2K_3}{M_2M_3} = \frac{AK_2}{AM_2}$ ....(II)

De (I) y (II) tenemos: $\frac{K_1K_2}{M_1M_2} = \frac{K_2K_3}{M_2M_3}$, de aquí se demuestra la propiedad.

Resuelto: Los de Baltic Way y traducido por Aldo Gil

Problema 4

Mi pregunta tiene que ver con una duda de fracciones parciales:

Cual es la descomposición parcial de: $\frac{1}{x^4-1}$

Fuente: Propuesto por Simón Pablo Contreras González 07-08-06 Matracas

Solución:

¿Te refieres a la descomposición en fracciones (reales) simples? Si es así, hay que empezar factorizando el denominador en polinomios lineales o cuadráticos con raíces complejas, lo cual en este caso es muy simple:

$x^4\text{-}1 = (x^2+1)(x^2\text{-}1) = (x^2+1)(x+1)(x\text{-}1)$

Entonces,

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \Rightarrow$$

$$1 = A(x-1)(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (Mx+N)(x+1)(x-1)$$

Le damos a x los valores que anulan los distintos factores, y $x = 0$ que elimina la M,

$x = 1 \Rightarrow 1 = 4B \Rightarrow B=1/4$

$x = -1 \Rightarrow 1 = -4A \Rightarrow A = -1/4$

$x = 0 \Rightarrow 1 = -A + B - N \Rightarrow 1 = 1/4 + 1/4 - N \Rightarrow N = -1/2$

Le damos a x otro valor arbitrario, por ejemplo $x = 2$,

$x = 2 \Rightarrow 1 = -5/4 + 15/4 + (2M - 1/2).3 \Rightarrow M = 0$

Entonces,

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{-1}{4(x+1)}+\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{2(x^2+1)}$$

Solución: Ignacio Larrosa Cañestro-La Coruña (España)

Problema 5

Se tienen 5 esferas idénticas para el ojo humano, pero todas de peso diferente. Usando una balanza de 2 platos, y en 6 pesadas, se debe determinar cual es la esfera que por su peso esta ubicada en el medio de las 5.

Fuente: Propuesto por Sothergod Lista de Juegos de Ingenio – Snark 09-08-06

Solución:

Llamamos a las esferas del 1 al 5

Pesamos 1 con 4 suponemos 1 mas pesada, luego 2 con 3, suponemos 2 más pesada, luego pesamos 1 con 2 suponemos 1 más pesada. Usamos 3 pesadas y deducimos que la uno pesa más que las otras 3, por lo que es la más pesada o la segunda más pesada, la podemos descartar, Además sabemos que la 2 pesa más que las 3.

Descartando la 1, con las otras 4 podemos armar 12 combinaciones, sabiendo que la 2>3, de mas pesada a más liviana 2345 2354 2435 2453 2534 2543 4235 4253 4523 5234 5243 5423

La segunda más pesada será la mediana.

4ta pesada 4 contra 5, cualquiera sea el resultado tenemos 6 posibilidades.

A) Si la 5 es más pesada, pesamos

B) 5 con 2 (quinta pesada), si la 5 es mas pesada nos queda 5234 5243 y 5423 Pesamos la 2 con la 4 y la más pesada es. Si en la B la 2 es mas pesada nos quedan 2354 2534 2543, pesamos entonces la 5 con la 3 y la más pesada es.

Si en la 4ta pesada la 4 es más pesada, nos quedan 6 posibilidades, pesamos en la quinta la 4 con la 2, si la 4 es más pesada nos quedan 4235 4253 4523 Pesamos la 2 con la 5 y la más pesada es. Si en la quinta pesada la 2 pesa más que la

Olimpiadas Internacionales
Problemas Resueltos Nº 21 2006

4 nos quedan 2345 2435 2453, pesamos la 4 con la 3 y la más pesada es.

Con este método siempre descubrimos la del medio, pero poco podemos decir de las restantes posiciones.

Solución: Pablo Adrian Sussi

Problema 6

Si $\frac{a+1}{b}=\frac{3c}{a}=\frac{c}{c+1}$, además $b+c = 24$, calcule $a.c - b$

Fuente: Claudia Bastidas - 07-08-06 Matracas

Solución:

Creo que pude obtener la solución, sino que alguien me ayude a corregirla.

1) $(a+1).a= 3.cb$

2) $(a+1).(c+1)=cb$

3) $3c+3=a$

4) $b+c=24$

De **2** y **3** obtenemos:

5) $3c^2 +7c +4=cb$

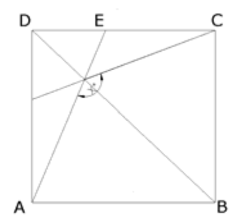
Con **5)** y **4)** obtenemos una ecuación de 2° grado $4c^2 - 17.c + 4= 0$. De aquí obtenemos 2 resultados de c.

$c= 4$ y $c= 0.25$

Si usamos $c= 4$ obtenemos que:

$a.c-b = 40$

Solución: Simón Pablo Contreras González y corregida por RomÃ¡n Genis- Matracas



Problema 7

En la figura $ABCD$ es un cuadrado y $2DE = AE$. Hallar el valor de x.

N.R. No utilizar funciones trigonometrícas.

Fuente: Propuesto por Rosa Contreras (Chile) - 07-08-06 Matracas

Solución:

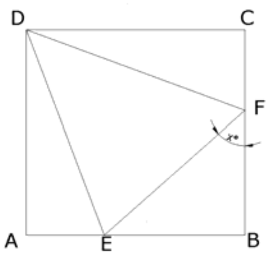
No se a que se refieres sin usar trigonometría, (suponiendo que es sin usar las funciones *sen, cos, tan,* etc.), puedes trazar la misma figura usando como eje de simetría DA, después te fijas en el triangulo AEE' puedes notar que como $2DE=AE$ y la distancia de E a E' es $2DE$,

entonces, ese triángulo es equilátero, todo triangulo equilátero tiene sus tres ángulos de 60°, fijarse en el punto de intersección de AE con la diagonal, llamémosle F, si te fijas en el ángulo FDE mide 45° por ser la mitad de 90°, el ángulo DEA mide 60° por ser parte del triangulo equilátero anterior, y el ángulo $DFE=180°-60°-45°=75°$ por ser opuesto por el vértice al ángulo x además tomando en cuanta que seria el doble $x=2(75)=150°$

Podría existir otra manera, pero esta me parece la más fácil...

Solución: Raziel Anderson

<u>Problema 8</u>



En la figura $ABCD$ es un cuadrado $AE = CF$ y $\angle ADE=30°$. Hallar el valor de x.

Fuente: Propuesto por Rosa Contreras (Chile) - 07-08-06 Matracas

<u>Solución:</u>

En tu cuadrado si $EA=CF$ entonces $EB=FB$ en el triángulo como en todo triángulo a ángulos iguales se oponen lados iguales y viceversa tenemos $2x+90°=180$ despejando y resolviendo $x=45°$. Lamentablemente suelo equivocarme, muy seguido...

Solución: Raziel Anderson

<u>Problema 9</u>

Si $ab = c$, calcular: $K = \dfrac{a}{ab+a+1} + \dfrac{bc}{b+bc+c} + \dfrac{1}{a+1+c}$

Fuente: Examen Parcial Cesar Vallejo Perú – Mayo 1993

<u>Solución</u>

Poniendo en función de a y c:

$$K = \frac{a}{c+a+1} + \frac{bc}{\frac{c}{a}+\frac{c^2}{a}+c} + \frac{1}{a+1+c}$$

$$K = \frac{a+1}{a+c+1} + \frac{c}{a+c+1} = \frac{a+c+1}{a+c+1} = 1$$

$$K = \frac{a+1}{a+c+1} + \frac{\frac{c^2}{a}}{\frac{c}{a}(a+c+1)} + \frac{1}{a+1+c}$$

Solución: Solucionario de la academia

<u>Problema 10</u>

Hallar la raíz cúbica en base n de $\overline{8\gamma61}_{(n)}$. Nota $\gamma = 12$.

Fuente: Concurso de Admisión Universidad Nacional de Ingeniería 1995- Lima Perú

<u>Solución</u>

Con $\gamma = 12$, en $\overline{8\gamma61}_{(n)}$ tenemos:

$\overline{8\gamma61}_{(n)} = 8.n^3+12.n^2+6.n+1$

$= (2.n+1)^3 = [21_n]^3$

Luego la raíz cúbica en base n de $\overline{8\gamma61}_{(n)}$ es 21_n

Solución: Solucionario de la Universidad (después del examen por supuesto)

Acabáramos, no pensé que llegaríamos al número 21, aquí si le metí variado, a veces me pregunto hasta que número llegaremos, pues la verdad no lo se...., me pongo a ver la cantidad de material que tengo, y es bastante se los juro, así que a veces agarro así nomás y los pongo, de repente por ahí están medio incoherentes, y como ya saben que amo la teoría del caos (la firme no la matemática), pues de donde caiga y como me agarre el humor, así los pongo, voy por mi litio ante de romper la compu.... Chau amigos

Un abrazo

Aldo Gil Crisóstomo