La comidilla de las ecuaciones en este libro noruego que cayo por mis manos, me hace continuar con el Baltic Way, la verdad no se exactamente la historia, pero que tiene buenos problemas, joder que los tiene....

Problema 1

Determine todos los números reales a,b,c,d que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$abc+ab+bc+ca+a+b+c = 1$

$bcd+bc+cd+db+b+c+d = 9$

$cda+cd+da+ac+c+d+a = 9$

$dab+da+ab+bd+d+a+b = 9$

Fuente: Baltic Way 1999 – Reykiavik – Problema 1

Solución

Brillante solución haciendo cambio de variables:

Sustituyendo $A = a+1$, $B=b+1$, $C=c+1$, $D=d+1$, obtenemos:

$ABC = 2$ ……….…..(I)

$BCD = 10$….……….(II)

$CDA = 10$…..…….(III)

$DAB = 10$…………(IV)

Multiplicando (I), (II), (III) tenemos $C^3(ABD)^2 = 200$, lo cual al unir con la ecuación (IV), implica que $C^3 = 2$. De forma similar encontramos $A^3 = B^3 = 2$ y $D^3 = 250$. De aquí las únicas soluciones son: $a=b=c=\sqrt[3]{2}-1$, $d=5\sqrt[3]{2}-1$.

La verdad... no se me hubiera ocurrido, pero da las pautas de la belleza y el arte que pueden tener las soluciones.

Solución: Los de Baltic Way con el aporte de la traducción de Aldo Gil.

Problema 2

Encontrar las soluciones reales del siguiente sistema de ecuaciones:

$x+y+z+t = 5$

$xy + yz + zt + tx = 4$

$xyz + yzt + ztx + txy = 3$

$xyzt = -1$

Fuente: Baltic Way 2000– Oslo – Problema 17

Solución

Sea $A = x+z$ y $B = y+t$. Entonces el sistema de ecuaciones es equivalente a:

$A+B=5$

$AB=4$

$Bxz + Ayt = 3$

$(Bxz).(AYT) = -4$.

La primera de estas ecuaciones implica $\{A,B\} = \{1,4\}$ y las dos ultimas toman el valor $\{Bxz,Ayt\} = \{-1,4\}$. Una vez que hemos definido, $A = x+z$ y $B = y+t$, Bxz y Ayt son conocidos, es fácil hallar los valores correspondientes de x,y,z y t. Las soluciones son mostradas en la siguiente tabla:

A	B	Bxy	Ayt	x,z	y,t
1	4	-1	4	$\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$	2
1	4	4	-1	-	-
4	1	-1	4	-	-
4	1	4	-1	2	$\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

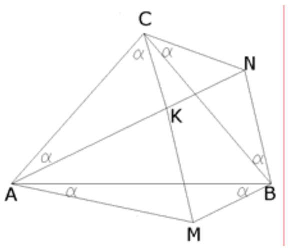
Solución: Los de Baltic Way con el aporte de la traducción y diagramación de Aldo Gil.

Problema 3

Sea K un punto en el triángulo ABC. Sean M y N puntos tales que M y K están en lados opuestos de AB, y N y K están en lados opuestos de BC. Asumir que: $\angle MAB = \angle MBA = \angle NBC = \angle NCB = \angle KAC$ $\angle KCA$. Demostrar que $MBNK$ es un paralelogramo.

Fuente: Baltic Way 1999 – Oslo – Problema 1

Solución



Sea $\angle MAK = \angle MBA$ …..= α. Entonces:

$\angle MAK = \alpha + (\angle BAC - \alpha) = \angle BAC$.

$\frac{|AM|}{|AB|} = \frac{1}{2\cos\alpha}$, y $\frac{|AK|}{|AC|} = \frac{1}{2\cos\alpha}$ (Ver figura). De aquí los triángulos MAK y BAC son semejantes, e implica que: $|MK| = \frac{|BC|}{2\cos\alpha}$. En consecuencia: $|BN| = \frac{|BC|}{2\cos\alpha}$, tenemos: $|MK| = |BN|$. En forma similar podemos demostrar que: $|BM| = |NK|$, y allí se deduce el resultado.

Solución: Los de Baltic Way con el aporte de la traducción de Aldo Gil.

Encontré hoy domingo en la limpieza y conservación de mi biblioteca, unos problemitas que recogí de una Academia Peruana, y cuya solución me pertenece, y que no recuerdo si fueron publicadas. Allí van con sus soluciones tal y como fueron planteadas en la época.

Problema 4

¿Cuántos números de 8 cifras poseen 7 cifras siete?

Fuente: 3º Practica de Aritmética Academia Cesar Vallejo – Octubre 1991- Lima Perú

Solución

Los números pueden ser de la forma $\overline{7777777a}$, siendo *a* desde 0 hasta 9, es decir 10 números, y como *a* podemos intercambiarla de posición 8 veces tendremos la cantidad de números que son 8.10 = 80 números.

Pero debemos notar que cuando *a* ocupe el lugar extremo izquierdo no puede ser cero, luego habrá que disminuir en 1 las posibilidades. Luego serán 80-1 = 79 números.

Solución: Aldo Gil Crisóstomo

Problema 5

En un cuadrilátero sus ángulos cumplen las siguientes relaciones: el exceso de la suma del primer y cuarto ángulo sobre el suplemento del tercero es igual a la medida del segundo ángulo. Si sumamos los suplementos del tercer y cuarto ángulo obtenemos 5 veces el valor de la suma de los complementos de los otros dos ángulos. El suplemento del complemento del primer ángulo aumentado en el complemento del suplemento del tercer ángulo es 170º. Hallar los ángulos.

Fuente: Academia Trilce – Razonamiento Matemático – Tomo II – Problema Nº 4 - Lima Perú

Solución

Planteamos las ecuaciones:

$A+B+C+D = 360º$ ……….…..(I)

$(A+D)-(180º-C) = B$……..…(II)

$(180º-A)+(180º-D) =$

$5(90º-B+90º-C)$………..…. (III)

$180º- (90º-A)+90º-(180º-C) = 170º$…(IV)

De (I) y (II):

$A+B+C+D = 360º$

$\underline{A-B+C+D = 180º}$

$2(A+C+D) = 540º$ de donde:

$A+C+D = 270º$

Luego: $B=360º - 270º = 90º$

De (IV) $90º+A-90º+C=170º$

Luego: $A+C=170º$, y como $A+C+D = 270º$,

Luego $D= 100º$

Resolviendo el resto: $A=110º$ y $C=60º$

Solución: Aldo Gil Crisóstomo

Problema 6

Se tiene tres terrenos uno de 11 m^2 mas y otro de 11 m^2 menos que el segundo, los cuales son trabajados por 60 obreros en 19 días del siguiente modo: en los cuatro primeros días, 30 en el pequeño, 20 en el intermedio y el resto en el grande, luego de los

30 obreros pasan 20 al terreno intermedio y luego de algunos días mas de los últimos 40 obreros pasan 30 al terreno grande hasta que concluye la obra. ¿Cuántos metros cuadrados tiene el terreno más pequeño si todos los obreros tienen similar rendimiento?

Fuente: Concurso de Becas Academia Cesar Vallejo – Ciclo Semestral UNI 1994 – Lima Perú

Solución

Sea: $A = a-11$ (terreno menor)

$B = a$ (terreno intermedio)

$C = a+1$ (terreno mayor)

60 obreros en 19 días hacen 1140 días-hombre y trabajan $a-11+a+11+a = 3a$ metros cuadrados.

En los 4 primeros días:

En el terreno *A*: 30.4 = 120 días–hombre en los primeros 4 días.

En el terreno *B*: 20.4 = 80 días–hombre en los primeros 4 días.

En el terreno *C*: 10.4 = 40 días–hombre en los primeros 4 días.

En los *X* días siguientes:

En el terreno *A*: 10.*X* = 10*X* días–hombre en los *X* días siguientes.

En el terreno *B*: 40.*X* = 40*X* días–hombre en los *X* días siguientes.

En el terreno *C*: 10.*X* = 10*X* días–hombre en los *X* días siguientes.

En el resto de los días:

En el terreno *A*: 10.(15-*X*) = 150-10*X* días–hombre en los (15-*X*) días finales.

En el terreno *B*: 10.(15-*X*) = 150-10*X* días–hombre en los (15-*X*) días finales.

En el terreno *C*: 40.(15-*X*) = 600-40*X* días–hombre en los (15-*X*) días finales.

Resumiendo:

En el terreno *A* se empleó:

$120+10X+150-10X = 270$ días-hombre.

En el terreno *B* se empleó:

$80+40X+150-10X = 230+30X$ días-hombre.

En el terreno *C* se empleó:

$40+10X+600-40X = 640-3X$ días-hombre.

Ahora con el análisis inicial planteamos la proporción: $\frac{270}{a-11} = \frac{1140}{3a}$. Resolviendo

A= 38 metros cuadrados.

Luego el terreno menor tiene 27 metros cuadrados.

Solución: Aldo Gil Crisóstomo

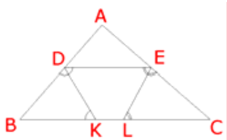
A partir de aquí, vamos a dar un paseo imaginario por Estonia, un país que supongo debe ser lindo, y bueno la verdad no se bien donde queda, pero que me llegaron unos problemitas rebárbaros (por Internet), y puse a trabajar el cerebrito traductor, apoyado por el google, globalink y mi propia experiencia, creo que me salieron bastante lúcidas y entendibles las soluciones, demos pues una vuelta por Estonia (todavía queda material para próximas publicaciones)

Problema 7

En un triángulo ABC sea D, E los puntos medios de AB y AC, respectivamente. Probar que el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos BDE y CED están en AB si y solo si la longitud de BC es iguala a la media aritmética de las longitudes de AB y AC.

Fuente: Selected Problems from Open Contest-Estonian 2004/2005 – Problema 2

Solución:



Sean K y L los puntos de intersección de BC con las bisectrices de los ángulos BDE y CED, respectivamente. Como DE es paralela a BC, tenemos: $\angle BDK = \angle EDK = \angle BKD$, y $|BD| = \dfrac{|AB|}{2}$. En forma similar $|CL| = \dfrac{|AC|}{2}$. De aquí:

$|BK| + |CL| = \dfrac{|AB| + |AC|}{2}$. Como los rayos BK y CL son directamente opuestos, tenemos:

$$|BC| = \frac{|AB| + |AC|}{2} \Leftrightarrow |BC| = |BK| + |CL| \Leftrightarrow K = L$$

Resuelto: Estonia y traducido por Aldo Gil

Problema 8

Se toman los primos relativos a y b de tal forma que $\dfrac{a+b}{a-b}$ es también un entero positivo. Probar que uno de los números $ab+1$ y $4ab+1$ es un cuadrado perfecto.

Fuente: Selected Problems from Open Contest-Estonian 2004/2005 – Problema 4

Solución:

Como $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{a-b+b+b}{a-b} = 1 + \dfrac{2b}{a-b}$, podemos ver que $\dfrac{2b}{a-b}$ debe ser un entero. Los números b y a-b son primos relativos entre sí porque a y b son primos relativos. De aquí 2 debe ser divisible por a-b. De aquí $a-b=1$ ó $a-b = 2$. El primer caso implica que $4ab+1 = 4(b+1)b+1 = (2b+1)^2$, el último caso implica que $ab+1=(b+2)b+1=(b+1)^2$.

Resuelto: Estonia y traducido por Aldo Gil

Problema 9

El profesor escribe en la pizarra dos números a y b tal que: $\dfrac{a}{b}.\sqrt{a^2+b^2}$ es un entero.

a) Silly-Sam dice que a es divisible por cualquier factor primo de b. Probar que esto es correcto.

b) Silly-Sam dice que $b \le a$. ¿Es esto correcto?

Fuente: Selected Problems from Open Contest-Estonian 2004/2005 – Problema 5

Solución:

a) Sea p un factor primo de b. Si observamos la expresión como un entero, el número $a\sqrt{a^2+b^2}$ debe ser divisible por p. Como p es primo, ó a es divisible por p ó $\sqrt{a^2+b^2}$ es divisible por p. En el último caso, elevando al cuadrado a^2+b^2 es divisible por p^2. Por la suposición inicial, b^2 es divisible por p^2, y también a^2 es divisible por p^2. De aquí a es divisible por p en ambos casos.

b) El profesor puede encontrar $a=12$ y $b=16$ con lo que $\dfrac{a}{b}.\sqrt{a^2+b^2} = 15$ es un entero. De aquí la inecuación $b \le a$ esta equivocada.

Resuelto: Estonia y traducido por Aldo Gil

Problema 10

Rein resuelve una prueba de matemática que consiste en preguntas de álgebra, geometría y lógica. Después de verificar los resultados, ocurre que Rein respondió correctamente 50% de las preguntas de álgebra, 70% de las preguntas de geometría y 80% de las de lógica. Por eso, Rein ha contestado en total 62% de las preguntas de álgebra y lógica, y en total 74% de las preguntas de geometría y lógica. ¿Cuál fue el porcentaje de preguntas correctas en toda la prueba?

Fuente: Problems from Final round National Olympiad-Estonian 2004/2005 – Problema 1

Solución:

Sea a,g y l los números de preguntas correctas de álgebra, geometría y lógica, y A,G y L el número total de preguntas de álgebra, geometría y lógica respectivamente. Las condiciones del problema son $a=0.5A$, $g=0.7G$, $l=0.8L$, $a+l=0.62(A+L)$, $g+l=0.74\ (G+L)$. Después sustituyendo en las dos ultimas ecuaciones, obtenemos:

$0.5A+0.8L= 0.62A+0.62L$, ó lo que es equivalente $0.12A=0.18L$, resultando $A=1.5L$.

Y $0.7G+0.8L = 0.74G+0.74L$, ó lo que es equivalente $0.04G = 0.06L$, resultando $G=1.5L$.

Ahora: $a+g+l=0.5A+0.7G+0.8L = 0.75L+1.05L+0.8L = 2.6L$, y $A+G+L = 1.5L+1.5L+L = 4L$.

Así el porcentaje de respuestas correctas es: $\frac{a+g+l}{A+G+L} = 65\%$

Resuelto: Estonia y traducido por Aldo Gil

A ver amigos, creo que llegamos a completar un número más de nuestros fascículos, dejo a ustedes un problema, a ver si se animan, lo resuelven me lo envían y lo publicamos el próximo número.

Un abrazo, Aldo Gil

Sean *a, b* y *c* números reales positivos. Demostrar que:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Fuente: British Mathematical Olympiad – Round 2 – 2005 – Problema 3.