Aquí se viene el número 18 de nuestros fascículos, empezamos por la "samba brasileira", estaba mirando algo de las Olimpiadas de Brasil, y encontré estos problemitas y bueno por moneda al aire salieron estos, ojala que haya sido una moneda inteligente....

Problema 1

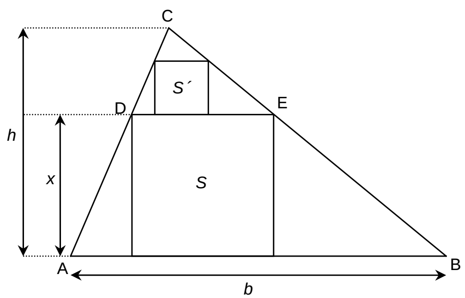
ABC es un triángulo acutángulo de base $\overline{AB}=b$ e altura $\overline{CH}=h$. Se trazan infinitos cuadrados son dentro de *ABC* de tal forma que cada cuadrado posee dos de sus vértices sobre los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ del triángulo y los otros dos vértices apoyados sobre el cuadrado anterior (el primer cuadrado está apoyado sobre $\overline{AB}$).

a) ¿Cual es la suma de las áreas de todos los cuadrados, en función de b y h?

b) ¿Cual es la mayor razón posible entre el área del primer cuadrado y el área del triángulo?

Fuente: OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA RIO DE JANEIRO – 2004-Nivel 4 –Problema 1

Solución



a) Por semejanza de triángulos *ABC* y *CDE*, tenemos que: $\frac{b}{h}=\frac{x}{h-x} \Leftrightarrow x=\frac{bh}{b+h}$, luego la razón de semejanza entre los dos triángulos es $\lambda=\frac{h}{b+h}$. Por eso, $\frac{S'}{S}=\lambda^2=\frac{h^2}{(b+h)^2}$.

Las áreas de los cuadrados forman, por lo tanto, una P.G. de razón λ^2. Como el área del primer cuadrado es $x^2=\frac{b^2h^2}{(b+h)^2}$, la suma de las áreas de los cuadrados es:

$$x^2+x^2\lambda^2+x^2\lambda^4+\cdots=x^2\left(1+\lambda^2+\lambda^4+\cdots\right)=x^2\left(\frac{1}{1-\lambda^2}\right)=\frac{b^2h^2}{(b+h)^2}\cdot\frac{(b+h)^2}{(b+h)^2-h^2}=\frac{bh^2}{b+2h}$$

b) El área del primer cuadrado es $x^2=\frac{b^2h^2}{(b+h)^2}$, luego la razón entre el área del primer cuadrado es al área del triángulo es $\frac{x^2}{\frac{bh}{2}}=\frac{2bh}{(b+h)^2}=\frac{2}{\frac{(b+h)^2}{bh}}$.

Como $\frac{(b+h)^2}{bh}=2+\left(\frac{h}{b}+\frac{b}{h}\right)\geq 4$, pues $(h-b)^2\geq 0 \Leftrightarrow h^2+b^2\geq 2bh \Leftrightarrow \frac{h}{b}+\frac{b}{h}\geq 2$. Por lo tanto $\frac{2}{\frac{(b+h)^2}{bh}}\leq\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Tomando $b=h$, la razón vale exactamente $\frac{1}{2}$, luego la máxima razón entre las áreas es $\frac{1}{2}$.

Solución: Los autores de la Olimpiada – Traducción del portugués por Aldo Gil C.

Problema 2

Encontrar todas las soluciones de la ecuación $m^3\text{-}16=5(n+2).2^n$, donde m y n son enteros positivos.

Fuente: OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA RIO DE JANEIRO – 2004-Nivel 4 –Problema 5

Solución

Para valores pequeños de n tenemos:

$n=1: m^3-16=30 \Rightarrow m^3=46 \Rightarrow m\notin\mathbb{Z}$

$n=2: m^3-16=80 \Rightarrow m^3=96 \Rightarrow m\notin\mathbb{Z}$

$n=3: m^3-16=200 \Rightarrow m^3=216 \Rightarrow m=6$

$n=4: m^3-16=1920 \Rightarrow m^3=1936 \Rightarrow m\notin\mathbb{Z}$

Ahora, para $n\geq 4$ tenemos $5(n+2)2^n$ múltiplo de 32.

Luego, $m^3=16+5(n+2)2^n$ es múltiplo de 2^4 y por lo tanto el factor 2 aparece por menos dos veces en la factorización de m. Elevando al cubo, m^3 es múltiplo de $2^6=64$ y por lo tanto $m^3-5n(n+2)2^n$ no puede ser igual a 16 (pues es múltiplo de 32).

Solución: Los autores de la Olimpiada – Traducción del portugués por Aldo Gil C.

Problema 3

Juan nació antes del 2000. El 25 de agosto del 2001 cumple tantos años como es la suma de los dígitos del año de su nacimiento. Determine su fecha de nacimiento y justifique que es la única solución posible.

Solución

Sea $\overline{19xy}$ el año de nacimiento de Juan, de modo que la suma de sus dígitos es 10 + x + y. Por otra parte, la edad que Juan cumple el año 2001 está dada por 2001 - (1900 + 10x + y) = 101 - 10x - y.

Igualando ambos valores, se tiene que $11x + 2y = 91$, debiendo ser x e y enteros entre 0 y 9.
Solucionando la ecuación, se tiene que como 2y es a lo sumo 18, entonces 11x es al menos 73, de modo que x es al menos 7. Con $x = 7$, obtenemos $y = 7$. Con $x = 8$ ó con $x = 9$, el valor y no resulta entero. Luego la única solución posible se da con $x = y = 7$, siendo entonces la fecha de nacimiento de Juan el 25 de Agosto de 1977.

<u>*Problema 4*</u>

En una ruleta circular se colocan al azar los números del 1 al 36. Demuestre que necesariamente debe haber 3 números consecutivos cuya suma es al menos 55.

<u>Solución</u>

Sean $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{36}$, los números dispuestos en la ruleta y supongamos que no hay 3 consecutivos cuya suma sea al menos 55. Entonces deberá tenerse:

$x_1 + x_2 + x_3 < 55$

$x_2 + x_3 + x_4 < 55$

....

$x_{34} + x_{35} + x_{36} < 55$

$x_{35} + x_{36} + x_1 < 55$

$x_{36} + x_1 + x_2 < 55$

Sumando estas 36 desigualdades, tendremos en el lado izquierdo la suma de los números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{36}$ repetida tres veces, o sea, el triple de la suma de los números del 1 al 36. Esta suma es igual a $36 \cdot 55 = 1980$, de modo que $1998 < 1980$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, debe haber 3 números consecutivos cuya suma sea al menos 55.

<u>*Problema 5*</u>

En el edificio más alto de *Terra Brasilis* viven *Eduardo* y *Augusto*. El número de piso del apartamento de Eduardo coincide con el número de apartamento de *Augusto*. La suma de los números de los apartamentos de los dos es 2164. Calcule el número de apartamento de *Eduardo* sabiendo que hay 12 apartamentos por piso. (Por ejemplo, en el primer piso están los apartamentos del 1 al 12, en el segundo, del 13 al 24, y así sucesivamente).

Fuente: 19 Olimpíada Brasileira de Matemática Júnior Segunda Fase-Problema 1

<u>Solución</u>

Sea *a* el piso del apartamento de Eduardo. Entonces el número de su apartamento es $12 (a - 1) + b$, con $1 \le b \le 12$.
De ahí,

$a + 12 (a - 1) + b = 2164,$

$b = 2176 - 13a$

$1 \le 2176 - 13a \le 12$

$a = 167,\ b = 5$

Por lo tanto, el número de apartamento de *Eduardo* es:

$12 (a - 1) + b = 12 \times 166 + 5 = 1997.$

Solución: Los autores de la Olimpiada – Traducción del portugués por Aldo Gil C.

<u>*Problema 6*</u>

Los círculos k_1 y k_2 con centros O_1 y O_2 respectivamente, son tangentes exteriormente en *C*, mientras que el circulo *k* con centro *O* es tangente exteriormente a k_1 y k_2. Sea *t* la tangente común de k_1 y k_2 en *C* y sea *AB* el diámetro de *k* perpendicular a *t*. Asumir que *O* y *A* están en el mismo lado de *t*. Demostrar que las líneas $AO_2;BO_1$ *t* tiene un punto en común

Fuente: 1996 National Contests-Problems and Solutions-1.1 Bulgaria – Problema 2

<u>Solución:</u>

Sean $r;\ r_1;\ r_2$ los radios de $k;\ k_1;\ k_2$ respectivamente. Sean *M* y *N* las intersecciones *AC* y *BC* con *k*. *AMB* es un triángulo rectángulo, *AMO* es isósceles y $\angle AMO = \angle OAM = \angle O_1CM = \angle CMO_1$

De aquí: $O;M;O_1$ son colineales y $AM=MC = OM=MO_1 = r=r_1$.

En forma similar: $O;N;O_2$ son colineales y $BN=NC = ON=NO_2 = r=r_2$.

Sea *P* la intersección de *t* con *AB*; las líneas *AN;BM;CP* concurren en el ortocentro de *ABC*, por el teorema de Ceva, $AP=PB = (AM=MC)(CN=NB) =r_2=r_1$.

Ahora sean D_1 y D_2 las intersecciones de *t* con BO_1 y AO_2. Entonces $CD_1=D_1P = O_1C=PB = r_1=PB$, y de la misma forma $CD_2=D_2P = r_2=PA$. Esto es $CD_1=D_1P = CD_2=D_2P$ y $D_1 = D_2$, y por lo tanto $AO_2;BO_1;t$ tienen un punto en común (se cruzan en el mismo punto).

Solución: Los autores de la Olimpiada – Traducción de Aldo Gil C.

<u>*Problema 7*</u>

Encontrar todos los pares de valores enteros positivos *x,y* que satisfacen la ecuación:

$2x^2+5y^2 = 11(xy-11)$

Fuente: 1998 Baltic Way Varsovia -Problema 3

Solución:

La solución del problema es bastante didáctica, desde el punto de vista de como reescribir la ecuación, y buscar la factorización, a partir de allí todo es sencillo.

Reescribiendo la ecuación como $2x^2+5y^2-xy-10xy= -121$ y factorizando tenemos: $(2x-y).(5y-x) = 121$.

Ambos factores deben tener el mismo signo. Si ellos fueran negativos, tendríamos: $2x < y < \frac{x}{5}$ lo cual es una contradicción. De aquí tenemos que 121, es el producto de dos enteros positivos: $a=2x-y$ y $b=5y-x$, y (a,b) deben ser los pares (1,121), (11,11) o (121,1). Examinando las tres posibilidades encontramos que solo uno de ellos da valores posibles para (x,y) = (14,27). Luego es la única solución de la ecuación original.

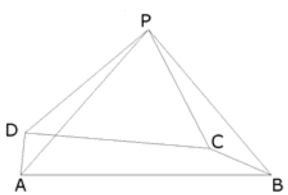
Solución: Los mismos de Baltic Way y traducida con mucha imaginación por Aldo Gil.

Problema 8

Sea *ABCD* un cuadrilátero, $|AD| = |BC|$, $\angle A + \angle B$ = 120° y sea *P* ser un punto exterior del cuadrilátero tal que *P* y *A* están en los lados opuestos de la línea *DC* y el triángulo *DPC* es equilátero. Probar que el triángulo *APB* es también equilátero.

Fuente: 1990 Baltic Way Riga -Problema 6

Solución:



Notar que $\angle ADC + \angle CDP + \angle BCD + \angle DCP = 360°$. De aquí: $\angle ADP$ = 360° - $\angle BCD$ - $\angle DCP = \angle BCP$.

Como tenemos $|AD| = |BC|$. Mas aún $\angle APB$ = 60°, luego $\angle DPC$ = 60° y $\angle DPA$ = $\angle CPB$. De aquí creo que puedes llegar a la conclusión.

Solución: Los mismos de Baltic Way y traducida con mucha imaginación por Aldo Gil.

Problema 9

a, b, c, d son enteros. Para todos los enteros *m, n* podemos encontrar los enteros *h, k* tales que $ah+bk = m$ y $ch + dk = n$. Demostrar que $|ad-bc|=1$.

Fuente: 46th Eötvös 1942 – Problema 2

Solución:

En particular podemos tomar *h, k* tal que $ch + dk = 1$, de tal forma que c y d no tiene factor común. Ahora tomamos $m = 1$, $n = 0$. Entonces $ch + dk = 0$, de tal forma que *c* divide a *dk* y de aquí *k*. Suponer $k = cr$, entonces $h = -dr$. Así $-adr + bcr = 1$.De aquí $ad - bc = \pm 1$.

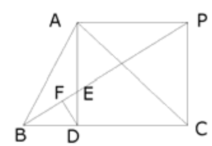
Solución: Los mismos de Eötvös (Hungría) y traducida por Aldo Gil.

Problema 10

Dado un triángulo agudo *ABC*. El punto d es el pie de la perpendicular de *A* a *BC*. El punto *E* esta sobre *AD* y satisface la ecuación: $\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|CD|}{|DB|}$. El punto *F* es el pie de la perpendicular desde *D* a *BE*. Probar que: $\angle AFC = 90°$

Fuente: 1998 Baltic Way Warsaw -Problema 15

Solución:



Completando el rectángulo *ADCP*. En la vista $\frac{|AE|}{|ED|} = \frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|AP|}{|DB|}$, los puntos *B,E,P* son colineales. De aquí: $\angle DFP = 90°$, y F esta en el circuncírculo del rectángulo *ADCP* con diámetro *AC*; de aquí: $\angle AFC = 90°$

Solución: Los mismos de Baltic Way y traducida con mucho esfuerzo por Aldo Gil.

Bueno amigos, hemos llegado al fin del número 18, y nos hemos paseado por Brasil, Bulgaria, y Varsovia y hemos concluido nuestro periplo en Hungría, creo que ha sido un viaje matador, y por allí me animé a poner un par de problemas de los cuales no tengo referencias acerca de sus autores, pero bueno me parecen interesantes.

Este ha sido íntegramente personal, no he visto sus colaboraciones, están siendo bastante flojitos eh?....

Lo importante es que llegan alientos de varios países, Colombia ha sido el último cuando un amigo me manifiesta que los esta poniendo en escuelas de por allá, se une a Costa Rica, México, Argentina, Chile y España quienes también manifiestan lo mismo, de eso se trata, y la verdad me anima mas a continuar esta tarea, eliminando la soberbia que por supuesto no he querido manifestar. Cualquier sugerencia será bienvenida, si por allí hay alguna curiosidad, en fin lo que sea es bueno.

Un abrazo

AI2-s