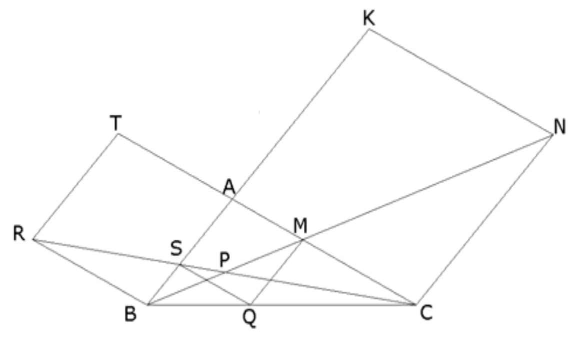
Problema 1



Los lados *AB* y *AC* del triángulo *ABC* se prolongan por *A* hasta formar los rombos *ABRT* y *ACNK*. *BN* y *CR* cortan a *AC* y *AB* en *M* y *S* respectivamente.

Trazamos *MQ* paralela a *AB*. *P* es punto de corte de *RC* y *BN*.

a) Probar que *AMQS* es un rombo

b) Probar que el área del triángulo *BDC* es igual al área del cuadrilátero *ASPM*

Fuente: Challenging Problems in Geometry- Alfred S. Posamentier-Problema 6-3- Pág 139

Solución

a) Sean *ATRB* = *a* y *AKNC* = *b*, los lados de los rombos. Como *AS* es paralela a *RT*, entonces $\Delta CAS \cong \Delta CTR$.

Por lo tanto $\frac{RT}{AS} = \frac{TC}{AC}$. Desde que: *TC=TA+TC*, tenemos:

$$\frac{a}{AS} = \frac{a+b}{b};\quad AS = \frac{ab}{a+b} \text{.....(I)}$$

De forma similar, como *AM* es paralela a *KN*, podemos deducir:

$$\frac{b}{AM} = \frac{a+b}{a};\quad AM = \frac{ab}{a+b} \text{...................(II)}$$

De (I) y (II): *AS* = *AM*.

Por ser paralelas tenemos que *AS* = *QM* y *AM* = *QS*. Por lo tanto el cuadrilátero *AMQS* es un rombo.

La segunda parte del problema (b), queda como ejercicio al estudiante.

Solución: Por el autor (del libro.. claro), y supertraducción de Aldo Gil

Problema 2

Halle analíticamente $Df \cap Rf$, si f es una función con la regla de correspondencia:

$$f(x) = \sqrt{x+8} + \sqrt{x-4}$$

Fuente: Olimpo Matemático: Concurso de becas Nº 2-Perú–Problema 4- Recopilado por Aldo Gil

Solución

a) El Dominio de la función son los valores de *x* para los que existe imagen, es decir, aquellos valores que hacen ambos radicandos **NO** negativos:

$$x+8 \geq 0 \iff x \geq -8$$

$$x-4 \geq 0 \iff x \geq 4$$

$$Df = \{x \in \Re : \ x \geq 4\} = [4, \infty)$$

b) El Rango de la función es el conjunto de imágenes de dicha función. Como dicha función está definida en un intervalo, y es continua y creciente en todo su dominio:

$$Rf = f([4,\infty)) = [f(4), \lim_{x\to\infty} f(x)) = [2\sqrt{3}, \infty)$$

La intersección de ambos conjuntos es:

$$Df \cap Rf = [4,\infty) \cap [2\sqrt{3}, \infty) = [4,\infty)$$

Nota: El crecimiento de la función viene garantizado por ser la función derivable, en todo su dominio, con derivada estrictamente positiva.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+8}} + \frac{1}{2\sqrt{x-4}} > 0$$

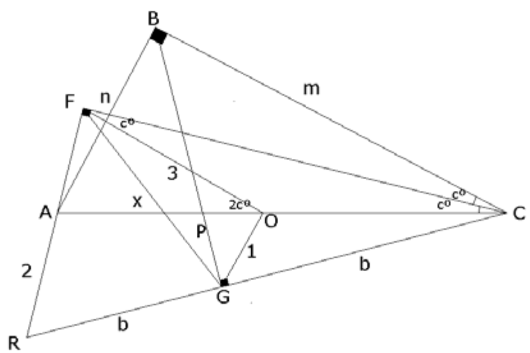
Solución: Diana Barredo – España – Ciudad de León

Problema 3

En un triángulo rectángulo *ABC* se tiene que *BC-AB*=2, *AC*=6. Calcular la longitud del segmento que une los pies de las perpendiculares trazadas desde *A* y *C* hacia las bisectrices de los ángulos *ACB* y *ABC*.

Fuente: Academia Cesar vallejo – 1975 - Folleto de Geometría

Solución



Sabemos que *m-n* = 2 y *AC*=6

El triángulo *RBC* es isósceles, entonces *RB=BC=m* y *GR=GC*, por lo tanto *AR=m-n=2*.

Aplicamos el teorema de los puntos medios en el triángulo *RCA*: *GO* paralela a *AR* y *GO* = 1. Por Pitágoras en el triángulo *FOG*, tenemos que *x* = $\sqrt{10}$

Solución: Academia Cesar vallejo

Problema 4

Si $\overline{xxnx}_5$ e $\overline{ynxx}_6$ representan al mismo número, hallar *x+n+y*.

Fuente: 3º Practica Calificada CEPREUNI – 1997-1- Problema

Solución

Se tiene $\overline{xxnx}_{5}=\overline{ynxx}_{6}$,

descomponiendo polinómicamente y efectuando. $151x+5n=216y+36n+7x$

$72(2x-3y)=31n$

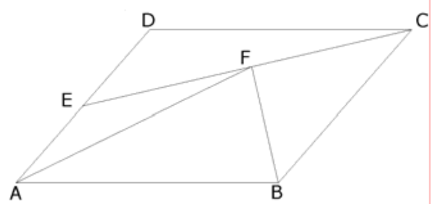
$n<5$, y debe ser par para que $31n$ contenga a 72 como factor, por lo tanto el único valor que cumple es $n=0$, y para que la ecuación tenga solución: $2x-3y=0$

$\Rightarrow 2x=3y$.

De aquí $x=3$ y $y=2$

Se pide $x+n+y = 3+0+2 = 5$.

Resuelto: Por los profesores de la UNI



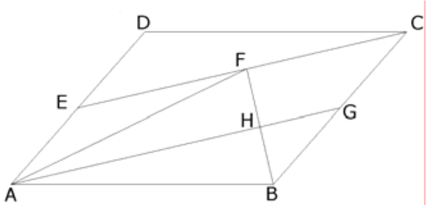
Problema 5

En el paralelogramo *ABCD*, *E* es un punto medio en *AD*, y *F* es la proyección ortogonal de *B* sobre *EC*. Probara que el triángulo *AFB* es isósceles

Fuente: Olimpiada Portuguesa de Matemática-XXIV-Final 2º día – Cat. B-2006-Problema 4

Solución

Sea *G* el punto medio de *BC* y *H* la intersección de *AG* y *BF*. Como *AG* y *EC* son paralelas, los triángulos *BCF* y *BGH* son semejantes. Asimismo: $\frac{BF}{BH}=\frac{CB}{GB}=2$, o sea *H* es punto medio de *BF*. Además *AH* es perpendicular a *BF*, luego es la altura del triángulo *ABF* y divide a *BF* en dos segmentos iguales. Por lo tanto el triángulo *ABF* es isósceles.



Solución: Los autores y traducción del portugués por Aldo Gil C.

Problema 6

x es el número de segundos sexagesimales que contiene un ángulo e *y* es el número de minutos centesimales que contiene el mismo ángulo. Calcular el valor de dicho ángulo en radianes sabiendo que. $x+y=10{,}020$

Fuente: Propuesto por Aldo Gil – Academia Matemática Sigma 1972

Solución

Recordemos lo siguiente:

$\frac{C}{200}=\frac{S}{180}=\frac{R}{\pi}$, donde *C* es la medida de un ángulo en grados centesimales, *S* es la medida en grados sexagesimales, y *R* la medida de un ángulo en radianes.

De la condición: $x = 3600\ S$

$y = 100\ C$

$3600S+100C=10{,}020$

Pero $10S = 9C$, luego:

$\frac{3600.9}{10}.C+100C=10{,}020$

De aquí $C = 3^{g}$.

De: $\frac{C}{200}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{3\pi}{200}$ radianes.

Resuelto: Aldo Gil en el mismo año

Problema 7

Cual será el número de tres cifras que en el sistema septenario se escribe con las mismas cifras que en el sistema de base 9, aunque en orden inverso.

Fuente: Propuesto por Aldo Gil – Academia Matemática Sigma 1972

Solución

$\overline{abc}_{7}=\overline{bca}_{9}$

$a\neq 0$ y $b\neq 0$

$a, b, c<7$

Desarrollando: $49a+7b+c = 81c+9b+a$

$24a = 40c + b$.

Empieza el tanteo:

a) máximo valor del lado izquierdo:

$24.6 = 144$

De aquí: $c<4$

Si $c=1$: $24a = 40+b \Rightarrow$

$a=2$ y $b=8$ (falso)

Si $c=2$: $24a = 80+b \Rightarrow$

$a=3$ y $b=8$ (falso)

Si $c=3$: $24a = 120+b \Rightarrow$

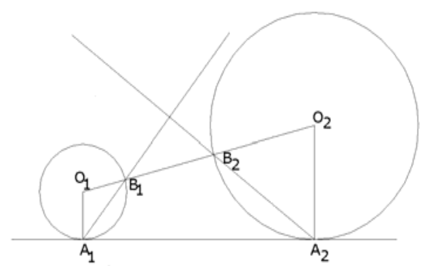
$a=5$ y $b=0$ (correcto)

Por lo tanto: $\overline{abc}=503$

Resuelto: Aldo Gil en el mismo año

Problema 8

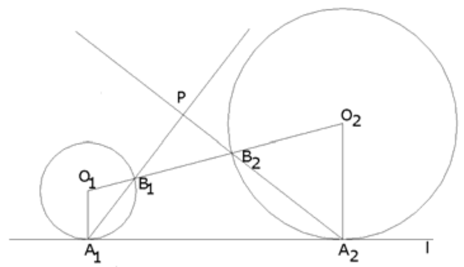
En la figura siguiente las circunferencias con centros O_1 y O_2 interceptan una recta *l* en los puntos A_1 y A_2 respectivamente. Los radios O_1A_1 y O_2A_2 son perpendiculares a *l*, y O_1O_2 interceptan a las circunferencias en B_1 y B_2 respectivamente.



Demostrar que A_1B_1 y A_2B_2 son perpendiculares.

Fuente: Olimpiada Portuguesa de Matemática-XXIV-Final 2º día – Cat. A-2006-Problema 5

Solución



Sea P el punto de intersección de A_1B_1 y A_2B_2. Los triángulos $A_1B_1O_1$ y $A_2B_2O_2$ son isósceles, y se cumple: $\angle O_1A_1B_1=\angle A_1B_1O_1$ y también se cumple: $\angle O_2B_2A_2=\angle B_2A_2O_2$. Por otro lado se tiene $\angle A_1B_1O_1=\angle PB_1B_2$ y $\angle O_2B_2A_2 = \angle PB_2B_1$ porque son ángulos opuestos por el vértice. Los radios O_1A_1 y O_2A_2 son perpendiculares a l, o sea $\angle O_1A_1B_1+\angle PA_1A_2=90^o$ y $\angle O_2A_2B_2+\angle PA_2A_1=90^o$. Sumando esta igualdad miembro a miembro tenemos:

$\angle O_1A_1B_1+\angle PA_1A_2+\angle O_2A_2B_2+\angle PA_2A_1 = 180^o$, esto es:

$\angle PB_1B_2+\angle PA_1A_2+\angle PB_2B_1+\angle PA_2A_1=180^o$. Más $\angle PB_1B_2+\angle PB_2B_1=180^o-\angle B_1PB_2$ y $\angle PA_1A_2+\angle PA_2A_1=180^o-\angle B_1PB_2$. Por lo tanto $\angle B_1PB_2=90^o$. Con esto se concluye que las rectas son perpendiculares.

Solución: Los autores y traducción del portugués por Aldo Gil C.

Problema 9

Si $senx\ .\ cosx=\dfrac{1}{a}$, $a>2$, $x\in<\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}>$, halle $K=cos\ x-sen\ x$

Solución

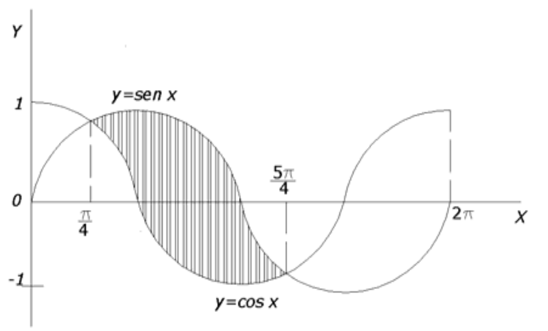
Dato: $senx\ .\ cosx=\dfrac{1}{a}$, y se debe hallar: $K=cos\ x-sen\ x$... (I)

Elevando al cuadrado:

$K^2=cos^2x+sen^2x-2sen.cosx$

$K^2 = 1 - 2.\dfrac{1}{a}\Rightarrow K=\pm\sqrt{\dfrac{a-2}{a}}$,

para determinar el signo se tiene que: $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{5\pi}{4}$



De las gráficas se observa que en dicho intervalo: $sen\ x > cos\ x$. Luego de (I): K es negativo $\therefore K=-\sqrt{\dfrac{a-2}{a}}$

Problema 10

¿Cuál es la máxima diferencia que pueden tener 2 números de 3 cifras cada uno, tal que al dividirlos entre 30 se obtiene un residuo máximo.

Fuente: Propuesto por Aldo Gil – Academia Matemática Sigma 1972

Solución

$\overline{abc}=30q+29.$

Para que $\overline{abc}$ sea máximo, q (cociente) debe ser máximo, tal que se cumpla la condición. $q<34$ para que el dividendo sea de 3 cifras, con $q=33$, se obtiene el mayor múltiplo de 30 de 3 cifras.

Luego como hay residuo máximo igual a 29, $q=32$ y $\overline{abc}=989$

Para que $\overline{abc}$ sea mínimo, q es mínimo tal que se cumpla la condición. q>3 para que el dividendo sea de 3 cifras, con $q=4$, se obtendrá el menor múltiplo de 30 de 3 cifras.

Luego como hay residuo máximo igual a 29, $q=3$ y $\overline{abc}=119$

La máxima diferencia será; 989-119 = 870.

Resuelto: Aldo Gil en el mismo año

Y concluimos el número 17, el secreto es haber rebuscado el arcón de los recuerdos, y la década del 70 (donde fui profe) fue bastante bueno .. creo, y por allí que no me sale la flojera para hacer dibujitos, tengo una mesa de 2.8 metros de largo y 1 metro de ancho donde esta mi compu, y la tengo llena de libros, chapo uno y busco, y voy ojeando y hummm... , puede ser, hummm.. mejor este, y al final de repente pongo los menos apropiados, pero si les gustan en fin, tengo material para varios fascículos mas, eso si los de idiomas distintos al castellano los traduzco directo. En este número si quise llenar un poquito el ego con los problemas que puse en los 70`,sorrry... no lo vuelvo a hacer, la tortura debe ser insoportable para ustedes.

Eso si las colaboraciones serán bien recibidas y publicadas, NO SEAN FLOJOS, HELP ME....

Al2-s Gil Crisóstomo