

Hola, espero que estén con el mismo entusiasmo que yo con los problemitas, el número anterior si tuvo una clara investigación y meditación, muchos problemas se quedaron en el tintero, y caray ahora si me da flojera hacer los dibujitos, es lo mas pesado.

Y por lo tanto truncamos el mes de la geometría, y ponemos algo de las listas, arrancamos con uno medio poético y que me pareció bonito. Si por allí me vence la curiosidad pongo uno del teorema de los 9 puntos, vamos a ver.

Problema 1

Seis personas en una mesa están, menores de cien, mayores de edad, de joven a viejo, ordenados van, Agustina, Santiago, Sebastián, Federico, Ricardo y Soledad. Tres de ellos son amigos y se da, una curiosa situación en realidad, para saber de cualquiera su edad,

Fuente: Daniel Ricardo Suárez

suma la de los otros dos y casi está, invierte las cifras y la obtendrás. Más curioso aún, es lo que vendrá, con los otros tres, lo mismo ocurrirá. Si dijera cuantas parejas puedes formar de la misma edad, podrías calcular, de cada uno de ellos, cual es la edad. ¿De cada uno de ellos, cuál es la edad?

Solución

Vemos las posibilidades para los 3 amigos,

$$10a+b, 10c+d, 10e+f$$
$$10a+b+10c+d=10f+e$$
$$10a+b+10e+f=10d+c$$
$$10e+f+10c+d=10b+a$$

$$19a+19f+19c=8b+8d+8e$$

$$19(a+f+c)=8(b+d+e)$$

Única posibilidad $a+f+c=8$ y $b+d+e=19$, la suma de las 3 edades da entonces $8*10+19=99$.

Además podemos deducir que las edades son múltiplos de 9.

Sumamos las 2 primeras ecuaciones reorganizamos y obtenemos:

$$20a+2b=9f+9d-9e-9c$$

$$10a+b=4.5(f+d-e-c)$$

$f+d-e-c$ puede ser par o impar, pero si es impar entonces $10a+b$ sería una edad con decimales, por lo tanto tiene que ser par, y entonces un par por 4.5 da múltiplo de 9. Esto obviamente vale para las otras edades también, entonces tenemos que cualquier suma de 3 múltiplos de 9 que sumados da 99 cumple con el requisito que la suma de 2 de ellos es el orden inverso de los dígitos del tercero.

Si los números tienen que ser distintos tenemos:

18 27 54

18 36 45
Estos son los 2 únicos tríos que cumplen con el requisito de que todos sean mayores de edad, pero hay 2 con la misma edad. Por lo tanto si tienen que ser todos mayores de edad y todos de distinta edad, no hay solución posible.

Pasemos a la posibilidad de que valgan de la misma edad pero que sean todos mayores, en cada trío entonces puede haber repeticiones también, tendríamos las siguientes posibilidades

18 27 54, 18 36 45, 18 18 63, 27 27 54, 36 36 27

Ahora viene entonces que se entiende por parejas de la misma edad. Si son 2 personas que tengan la misma edad, entonces tendríamos

18 27 54 y 18 36 45 : 1 pareja

18 27 54 , 18 18 63: 3 parejas

Solución: Pablo Adrian Sussi

Comentario de un posible error de Pablo, encontrado por ... Pablo

Descubrí un error al final de mi conclusión ya que veo que hay 2 posibilidades que no se repiten 1 y 4 parejas por lo tanto no podemos deducir nada hasta no saber cuantas parejas se forman, si 1 o 4, luego de saberlo si.

No veo donde está el fallo en mi deducción, intentaré revisarlo luego.

Saludos

Replica al comentario por el autor del problema

Me parece que no hay ningún error en tu conclusión y sí uno en mi problema.

Se me escapó la posibilidad de 27, 27, 45 y 36, 36, 27 con 4 parejas.

Yo había considerado el caso de sólo una pareja.

Podría ser un poco "maldito" y aducir que como el "poema" dice "cuantas parejas" indica que deben ser más de una. Ahí sí quedaría solo tu solución como válida.

Y bue ...

18 27 54, 27 27 45 : 3de 27
18 27 54, 36 36 27 : 1 de 27 y 1 de 36=2
18 36 45, 18 18 63, 3 parejas
18 36 45, 27 27 45 : 2 pareja
18 36 45 , 36 36 27: 3 parejas
18 18 63, 27 27 45: 2 parejas
18 18 63, 36 36 27 : 2 parejas
27 27 45 , 36 36 27 : 4 parejas
Por lo tanto hay sólo 1 que no se repite y es el de 4 parejas, y el único entonces que si nos dicen la cantidad de parejas podríamos deducir las edades de todos.

Conclusión:

Agustina 27

Santiago 27

Sebastián 27

Federico 36

Ricardo 36

Soledad 45

A tratar de ser más cuidadoso con el siguiente problema. Saludos, Daniel.

N.R: Como me gustan estos problemas discutidos, me parece que a veces engrandecen una solución, no es lo mismo cuando un problema se encuentra académica y formalmente resuelto, a veces queda el sinsabor de la frialdad. A veces me pasa... no se si a ustedes también.

Problema 2

A ver si me dais una pista por donde atajar este problema:

"Sean p y q dos números naturales tales que: $p/q = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \dots - 1/1318 + 1/1319$. Demostrar que p es divisible por 1979."

Supongo que p y q son primos entre sí, aunque el enunciado no dice nada.

Se que 1979 es primo, la suma de la derecha no tiene una expresión, es la suma parcial de la armónica alternada. Lo he intentado por reducción al absurdo, pero nada.

Este problema ha sido propuesto en la prueba práctica de oposiciones de secundaria en Castilla y León. Un poco difícil.

Fuente: Enviado a la lista por Paco

Solución

Transformemos $\frac{p}{q}$ de la siguiente forma:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots - \frac{1}{1319} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} \right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1319} - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} \right) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1319} - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots - \frac{1}{659} \right) = \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \frac{1}{662} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

Agrupamos estas fracciones en pares (la 1ª con la última, la segunda con la penúltima...):

Solución: Desconocida

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{1}{660} + \frac{1}{1319} \right) + \left(\frac{1}{661} + \frac{1}{1318} \right) + \dots + \left(\frac{1}{989} + \frac{1}{990} \right) = \frac{1979}{660 \cdot 1319} + \frac{1979}{661 \cdot 1318} + \dots + \frac{1979}{989 \cdot 990}$$

Como 1979 es primo ningún denominador es divisible por 1979. Además que es el mínimo común múltiplo de los denominadores y entonces q y 1979 son primos entre sí. Por tanto: $\frac{p}{q} = 1979 \frac{p'}{q}$,

de donde $p = 1979 \cdot p'$, es decir es divisible por 1979 (c.q.d)

Problema 3

También los amigos piden los sencillitos, y sobre todo para plantear a sus alumnos métodos de resolución, a mí encantó este.

Les pido de favor me ayuden a plantear las ecuaciones lineales simultáneas para resolver el siguiente problema: Un proveedor de calculadoras graficas fabrica teclados y pantallas en México y Taiwán. En México fabrica por hora, 40 teclados y 32 pantallas;

en Taiwán fabrica por hora, 20 teclados y 32 pantallas. ¿Cuántas horas debe operar cada planta para cumplir con un pedido de 4000 teclados y pantallas?

Fuente: Enviado a la lista por Ramon 30 Junio 2006

Solución

Sean m y t el número de horas. Tenemos que

$$40m + 20t = 4000 \Rightarrow 2m + t = 200$$

$$32m + 32t = 4000 \Rightarrow m + t = 125$$

Restando, $m = 75$, y de aquí $t = 50$.

Solución: Ignacio Larrosa Cañestro

Problema 4

Aquí presento un problemita que a veces causa confusión, lo leí allá por el 2003 en una lista, y pues es bueno plantearlo, para ver la interpretación, la solución es sencilla, pero los conceptos son los problemáticos, sin mas "floro" al problema, tal y como vino:

Este es un problema q no puedo resolver, o porque esta mal, o que esta mal planteado o le falta algo, pero aquí esta, ustedes que saben resuévanlo es de ecuaciones cuadráticas. (Parece sencillo, lo que no entiendo es a que se refiere con el exceso)

El cuadrado de un número disminuido en 9 equivale a 8 veces el exceso del número sobre 2. Hallar el número

El Resultado que el libro dice 7, o sea según el libro 7 es el número, pero ó esta mal ó, no se que se debe hacer para llegar al 7

Fuente: Foro 100cia.

Solución

El exceso de x sobre 2, es la diferencia entre x y 2, por lo que la ecuación es:

$$x^2 - 9 = 8(x-2)$$

N.R: La otra solución es $x = 1$, debido a que por ser una cuadrática hay dos soluciones.

Solución: No lo se, dice Anonymus, pero la NR si es de Aldo Gil (algo tengo que aportar no?)

Resuévanlo con procedimiento, yo ya lo intente hasta hartarme

Se me olvido poner la formula, o la ecuación que me dice según creo:

$$x^2 - 9 = 8 \cdot \frac{x}{2}, \text{ ó}$$

$$x^2 - 9 = 4x$$

Creo yo que ese es la fórmula que pide, sin embargo, no da para nada el resultado que viene en el libro, es mas ni siquiera da ninguna raíz entera

Problema 5

Cuantos rollos de 28 cm., de diámetro y 250 cm., de largo, entran en un contenedor de 20' (mide 5.90m de largo, 2.34m de ancho, 2.39m de alto, pero hay que tener en cuenta que se deben abrir las puertas por lo que en realidad mide 2.33m de ancho y 2.28m de alto. y tiene una capacidad máxima de 18.300 Kg., de peso y un volumen máximo de 33 metros cúbicos

Fuente: Thorny – Foro 100cia

Solución

Divides el diámetro de cada rollo por el largo y el ancho y tienes el n° de rollos que pondrás en la base, luego divide la altura de cada rollo por la altura de el cubo y tendrás en n° de rollos que pones de alto, luego multiplicas y ya esta.

Solución: Demiurgo – Foro 100cia.

Comentario a la solución de Demiurgo por cthutlu

Siento aguarte la fiesta, pero hay que hacer la siguiente consideración, ¿Esos rollos se pueden seccionar? En caso afirmativo, tu respuesta es correcta, pero en caso negativo, debes calcular el área de la base, dividirla entre el área de la base del rollo, multiplicarla por un factor menor de 1, que indicaría el porcentaje del

área que cubren los círculos en una superficie rectangular, teniendo en cuenta que la disposición que menos resquicios deja es de un círculo rodeado por otros 6 (creo que el valor es aproximadamente 0.74, pero no estoy seguro). Luego seguiría multiplicándole por el n° de rollos que cubren la altura (altura del contenedor dividido por altura del cilindro)

Problema 6

Tres personas A, B y C han prestado sus ahorros durante un año obteniendo una ganancia de 890 u.d.m. A la persona A le pagan una tasa del 8%. A la persona B, una tasa del 5%. A la persona C, el 3%. El capital ahorrado por B excede en 2000 u.d.m. al ahorrado por A. Así mismo, C ahorró 3000 u.d.m. más que B. Hallar los ahorros de A, B y C.

N.R: u.d.m. (unidad de moneda)

Fuente: Concurso de becas N° 4-Lima Perú – Problema 1- Recopilado por Aldo Gil

Solución

Sean A, B, C, respectivamente, los ahorros buscados.

Relación entre capitales:

$B = A + 2.000$

$C = B + 3.000$

La ganancia de los ahorros es: $0,08A +$

$0,05B + 0,03C = 890$

Luego: $8A + 5B + 3C = 89.000$

Al sustituir:

$8A + 5B + 3C = 89.000$

$8A + 5(A + 2.000) + 3(B + 3.000) = 89.000$

$8A + 5A + 10.000 + 3B + 9.000 = 89.000$

Solución: Oscar Emilio Olmedo, - Santa Ana, El Salvador, C.A. (Amigo entrañable).

$13A + 3B = 70.000$

$13A + 3(A + 2.000) = 70.000$

$13A + 3A + 6.000 = 70.000$

$16A = 64.000$

$A = 4.000 \text{ u.d.m.}$

Luego:

$B = A + 2.000$

$B = 4.000 + 2.000 \Rightarrow B = 6.000 \text{ u.d.m.}$

También:

$C = B + 3.000$

$C = 6.000 + 3.000 \Rightarrow C = 9.000 \text{ u.d.m.}$

Problema 7

Hallar un número de 4 cifras y cuadrado perfecto. Si la primera y la segunda cifra de su raíz es igual a la cifra de orden uno y cero del número de 4 cifras, respectivamente.

Fuente: Concurso de becas N° 4-Lima Perú – Problema 2- Recopilado por Aldo Gil

Solución

Se busca: $ab^2 = \overline{cdab}$

Dígitos con exponente dos.	Terminados en sí mismos.
$0^2 = 0$ $1^2 = 1$ $2^2 = 4$ $3^2 = 9$ $4^2 = 16$	$5^2 = 25$ $6^2 = 36$ $7^2 = 49$ $8^2 = 64$ $9^2 = 81$
	$0^2 = 0$ Caso A $1^2 = 1$ Caso B $5^2 = 25$ Caso C $6^2 = 36$ Caso D

Caso A.

$ab^2 = \overline{cdab}$

$a0^2 = \overline{cda0}$

Luego: $(10a+0)^2 = (10a)^2 = 100a^2$

Termina en "00".

Valor obligado: $a = 0$

Caso B.

$ab^2 = \overline{cdab}$

$a1^2 = \overline{cda1}$

Luego: $(10a + 1)^2 = 100a^2 + 20a + 1$

Termina en "1"

Para "2a" terminado en "a":

Valor obligado: $a = 0$

Caso C.

$$ab^2 = \overline{cdab}$$

$$a5^2 = \overline{cda5}$$

$$\text{Luego: } (10a+5)^2 = 100a^2 + 100a + 25$$

Termina en "5"

Para "10a+2" terminado en "a":

Valor obligado: **a = 2**

$$\text{Luego: } a5^2 = 25^2 = 0625 \quad \text{¿?} \quad \overline{cda5}$$

Caso D.

Solución: Oscar Emilio Olmedo, - Santa Ana, El Salvador, C.A. (Amigo entrañable)

Problema 8

$$\text{Factorizar: } P(x) = (2x^2 + 3)^3 + 4x^2 \cdot (x^2 + 3) - 10x^2 - 3.$$

Indicar un factor primo cuadrático.

Fuente: Concurso de becas N° 4-Lima Perú – Problema 4- Recopilado por Aldo Gil

Solución

Observamos que el polinomio depende de la indeterminada x , exclusivamente a través de su cuadrado, luego podemos

hacer un cambio de variable: $t=x^2$:

$$Q(t) = (2t + 3)^3 + 4t(t + 3) - 10t - 3$$

Operamos:

$$Q(t) = (8t^3 + 36t^2 + 54t + 27) + (4t^2 + 12t) - 10t - 3$$

Simplificamos:

$$Q(t) = 8 \cdot (t^3 + 5t^2 + 7t + 3)$$

Para factorizar este polinomio, aplicando la regla de Ruffini, detectamos que tiene

Solución: Diana Barredo Blanco (Una gran colaboradora)

$$ab^2 = \overline{cdab}$$

$$a6^2 = \overline{cda6}$$

$$\text{Luego: } (10a+6)^2 = 100a^2 + 120a + 36$$

Termina en "6"

Para "12a+3" terminado en "a":

Valor obligado: **a = 7**

$$\text{Luego: } a6^2 = 76^2 = 5776 = \overline{cda6}$$

dos raíces, a saber: $t = -1$, con multiplicidad 2, y $t = -3$, con multiplicidad 1.

Por lo tanto:

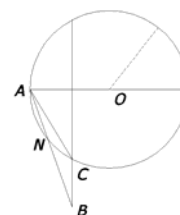
$$Q(t) = 8 \cdot (t^3 + 5t^2 + 7t + 3) = 8 \cdot (t + 1)^2 \cdot (t + 3)$$

Y, deshaciendo el cambio de variable que hicimos:

$$P(x) = 8 \cdot (x^6 + 5x^4 + 7x^2 + 3) = 8 \cdot (x^2 + 1)^2 \cdot (x^2 + 3)$$

que tiene dos factores primos cuadráticos, a saber, $(x^2 + 1)$ -de multiplicidad 2- y $(x^2 + 3)$ -de multiplicidad 1-.

Problema 9



En la figura calcular la longitud del segmento AC, si: $AN = 4$ y $NB = 5$.

Fuente: Concurso de becas N° 4-Lima Perú – Problema 5- Recopilado por Aldo Gil

Solución:

Como el punto A pertenece a una circunferencia cuyo diámetro, determinado por A, es perpendicular a la recta BC, entonces, existe una inversión, de centro el punto A, que transforma dicha circunferencia en la recta BC.

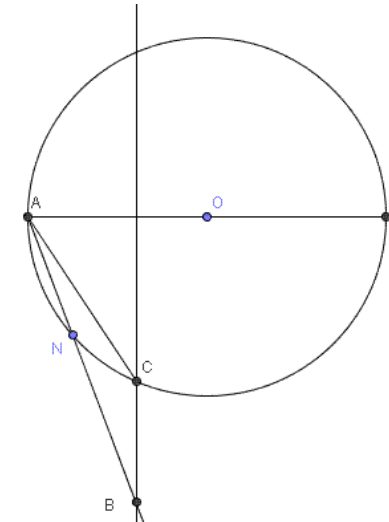
Por dicha inversión, el punto N se invierte en el punto B, y el punto C se invierte en sí mismo, luego:

$$AC \cdot AC = AN \cdot AB \Rightarrow$$

$$AC^2 = AN \cdot (AN + NB)$$

$$AC^2 = (4+5) \cdot 4 = 36$$

$$AC^2 = 36 \Rightarrow AC = 6$$

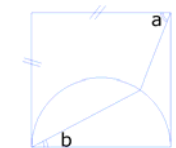


Solución: Diana Barredo Blanco (Una gran colaboradora)

Problema 10

En el cuadrado mostrado, si $\tan 2b = \frac{5}{12}$. Hallar $\tan a$.

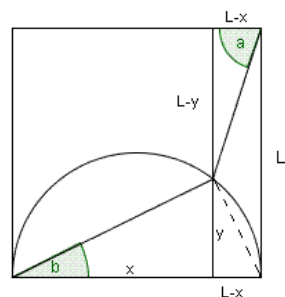
Fuente: Concurso de becas N° 4-Lima Perú – Problema 8- Recopilado por Aldo Gil



Solución

Sea L, el lado del cuadrado.

Aplicando el teorema de la altura al triángulo rectángulo inscrito en la semicircunferencia:



$$y^2 = x \cdot (L - x)$$

Dividiendo los dos miembros de la igualdad entre

x^2 , y teniendo en cuenta que $\tan b = \frac{y}{x}$:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{L}{x} - 1\right) \Rightarrow \frac{L}{x} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1$$

$$\boxed{\frac{L}{x} = (\tan b)^2 + 1}$$

Por otro lado:

$$\frac{5}{12} = \tan 2b = \frac{2 \cdot \tan b}{1 - (\tan b)^2} \Rightarrow 5 - 5 \cdot \tan^2 b =$$

$$24 \cdot \tan b \Rightarrow 5 \cdot \tan^2 b + 24 \cdot \tan b - 5 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$\tan b = \frac{-24 \pm \sqrt{676}}{10} = \frac{-24 \pm 26}{10} \Rightarrow \tan b = -5 \quad \tan b = \frac{1}{5}$$

Como el ángulo b es agudo, la tangente tiene que ser positiva, luego: $\boxed{\tan b = \frac{1}{5}}$

Ahora bien, por definición, la tangente del ángulo a es:

$$\tan a = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{L - y}{L - x}$$

y, dividiendo numerador y denominador entre x :

$$\tan a = \frac{\frac{L}{x} - \frac{y}{x}}{\frac{L}{x} - 1} = \frac{(\tan^2 b) + 1 - \tan b}{(\tan^2 b) + 1 - 1} = \frac{\tan^2 b - \tan b + 1}{\tan^2 b} = \frac{\frac{1}{25} - \frac{1}{5} + 1}{\frac{1}{25}} = 1 - 5 + 25 = 21$$

Solución: *Diana Barredo Blanco (Una gran colaboradora)*

Y ... se acabó, ya ves gracias a ustedes nos lo hicimos en dos días

Aldo Gil Crisóstomo