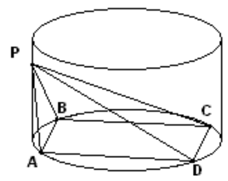
Empezamos este número un poco restringido, solo a los amigos seleccionados, con un nuevo tema. Llamaremos a este mes el mes de la Geometría, salvo mejor opinión, y colocaremos problemitas de Geometría Plana, del Espacio y Analítica, esperamos sus aportes, el otro mes será de aritmética o en fin lo que quieran.

Problema 1



Calcular *AP* si *PD=13, PB=5, PC=12*, de la figura y *ABCD* es un rectángulo.

Fuente: Olimpo Matemático: Concurso de becas Nº 2-Lima Perú – Problema 5- Recopilado por Aldo Gil

Solución:

Al ser *ABCD* un rectángulo, sus cuatro ángulos son rectos y las diagonales se cortan en su punto medio, siendo éste el centro del rectángulo, llamado O.

Consideremos un sistema de referencia ortonormal tridimensional centrado en O, centro del rectángulo, con ejes *OX* y *OY* paralelos, respectivamente, a los segmentos *AD* y *AB*. Podemos asociar las siguientes coordenadas en el sistema de referencia elegido:

$O=(0,0,0)\quad A=(-a,-b,0)\quad B=(-a,b,0)$
$C=(a,b,0)\quad D(a,-b,0)$

Sea un punto: $P=(x,y,z)$

Por hipótesis:

1. $PD=13, \Leftrightarrow$

   $(x-a)^2+(y+b)^2+z^2=169$

2. $PB=5, \Leftrightarrow$

   $(x+a)^2+(y-b)^2+z^2=25$

3. $PC=12 \quad \Leftrightarrow$

   $(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=144$

Como:

$PA^2=(x+a)^2+(y+b)^2+z^2$ y

$PD^2=(x-a)^2+(y+b)^2+z^2$

Se observa que:

$PA^2-PD^2=4ax \quad \Leftrightarrow \quad PA^2=PD^2+4ax$

- Por hipótesis,

$PD=13, \quad \Rightarrow \quad PA^2=169+4ax$

- Restando a la tercera la segunda:

$-4ax=119 \quad \Rightarrow \quad ax=\frac{-119}{4}$

Por lo tanto:

$$PA^2=169-\frac{119}{4}=\frac{676-119}{4}=\frac{557}{4} \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{PA=\frac{\sqrt{557}}{2}}$$

Nota: El punto *P* podría haber sido cualquiera del espacio, puesto que no se ha utilizado la hipótesis de que pertenezca a la superficie lateral de un cilindro de base la circunferencia circunscrita al rectángulo *ABCD*.

Solución: Diana Barredo – España – Ciudad de León

Problema 2

Ahora uno bien facilito, y yo medio romántico lo encontré en papel amarillento, buscando material para el folleto, y no me resisto a ponerlo

Sean las rectas L_1: $y = mx + b$ y la recta L_2: $y = nx + 15$.

Determinar *m, n, b* para que L_1 y L_2 sean ortogonales y se corten en (4,3)

Fuente: Propuesto en Práctica Calificada 1972 – Universidad Nacional de Ingeniería – Ciclo 1

Solución

Como L_1 y L_2 son ortogonales, entonces:

$m \cdot n = -1$.....................(*I*)

$L_1: y = mx + b$..........(*II*)

$L_2: y = nx + 15$ ......(*III*)

Como las rectas pasan por (4,3) y se cortan allí, este punto pertenece a ambas rectas:

En (*III*) L_2: $3 = 4n + 15$, luego $n=-3$

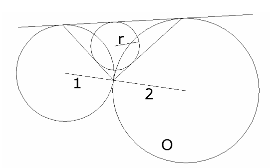
En (*I*) : $m = -1/3$

En (*II*) : $3 = 1/3 \cdot 4 + b$, de donde $b= 5/3$

Luego: $m=-3$, $n=1/3$ y $b= 5/3$

Solución: Resuelto por Aldo Gil en su práctica

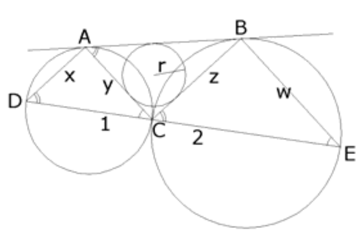
Problema 3



En la figura, hallar "*r*"

Solución

Este es un problema con una solución bien académica y explícita, por eso me gustó.



Al prolongar los radios, resultan los diámetros *CD* y *CE*, iguales a 2 y 4 respectivamente.

Unimos *D.E* con *A, B* y obtenemos los triángulos rectángulos *DAC* y *CBE*.

Dado que el triángulo es recto en *C* (debes demostrarlo), los ángulos *ACD* y *BCE* son complementarios, luego los triángulos *DAC* y *CBE* son semejantes.

Introducimos dependencias entre las magnitudes señaladas.

Así: $AB = t = 2\sqrt{2.1} = 2\sqrt{2}$.... tangente común

PONCELET: $y+z= t+2r = 2\sqrt{2}+2r$...... (I)

PITAGORAS: $y^2+z^2=(2\sqrt{2})^2= 8$ ....(II)

Y en virtud de la semejanza:

$\frac{y}{w}=\frac{1}{2}$ ....(III)

Ahora elevamos (III) al cuadrado y reemplazamos (II) en esta expresión:

$\frac{y^2}{w^2}=\frac{1}{4}$; $\frac{8-z^2}{w^2}=\frac{1}{4}$

Pero en el triángulo *CBE*: $w^2=16-z^2$

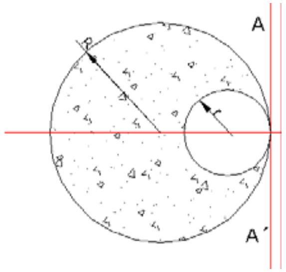
Entonces: $\frac{8-z^2}{16-z^2}=\frac{1}{4}$

De aquí: $z=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Reemplazando en (II): $y^2=8-\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2$, de aquí: $y=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Por último reemplazando *z* e *y* en (I)

$\frac{2\sqrt{6}}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{2}+2r$, de donde:

$r=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{3}$



Problema 4

Se tiene la sección definida por las circunferencias cuyos radios son *R* y *r* según la figura. Determinar el volumen del sólido generado al rotar la región sombreada sobre el eje *AA´*, para *R*=3*r*.

Solución

De la figura; por el teorema de Pappus y Guldin

$V = V_R - V_r$

$V=2\pi^2R^3-2\pi^2r^3$

$V= 2R^2(R^3-r^3)$; pero $R=3r$

Entonces: $V = 2\pi(R^3-\left(\frac{R}{3}\right)^3)$

De donde: $V = \frac{52}{27}\pi R^3$

Problema 5

Se tiene una caja de forma de paralelepípedo rectangular, si el largo es el doble del ancho y la suma de las tres dimensiones es igual a 14. Calcular la altura para que la superficie total tenga área máxima.

Fuente: Olimpo Matemático: Concurso de becas Nº 2-Lima Perú – Problema 6- Recopilado por Aldo Gil

Solución:

Sea: *x= ancho* ⟹ *2x=largo* ⟹ *altura=14-3x*

El área total es la suma de las áreas de sus seis caras:

$$Area_{TOTAL} = 2\cdot\left[2x^2+2x\cdot(14-3x)+x(14-3x)\right]=2\cdot\left[42x-7x^2\right]$$

El área es una función cuadrática de "x", que alcanza su máximo en el mismo valor que el polinomio de segundo grado $ax^2+bx+c=-7x^2+42$. Como el coeficiente de mayor grado es negativo ($a=-7<0$), su represtación gráfica es una parábola con sus ramas hacia abajo y que alcanza el máximo en su vértice:

Por lo tanto, el máximo se alcanza en: $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{42}{-14}=3$

La altura del paralelepípedo de área máxima es: *altura= 14-3x=5*

Solución: Diana Barredo – España – Ciudad de León

Problema 6

La diferencia de las medidas de los ángulos *B* y *C* en triángulo *ABC* es 90º. *AH* es la altura relativa a *BC*, *HC* y *BC* miden 36 y 27 respectivamente. Hallar la longitud de *AH*.

Fuente: Seminario de Geometría 2004-I Parte 2-2º seminario-problema 1 - Lima-Perú

Solución

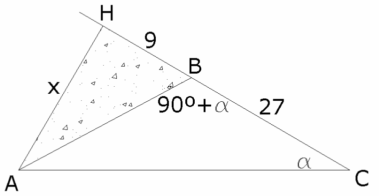
Datos : $\angle B-\angle C=90º$

Si $\angle C=\alpha$, entonces $\angle B=90+\alpha$

En el triángulo *AHB*: $\angle HAB=\alpha$

Luego: $\Delta AHB \approx \Delta CHA$

$\frac{x}{36}=\frac{9}{x} \Rightarrow x^2=36.9$



x=18.

Problema 7

Se tiene un romboide *ABCD,* exteriormente se construye el cuadrado *ABMR* y el triángulo equilátero *ADP*. Calcular la longitud del segmento que une los centros de los cuadriláteros *ABMR* y *MRCD*, si el perímetro de *ADP* = 18.

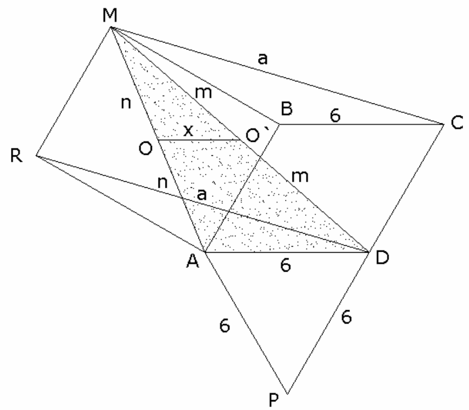
Solución

Si el perímetro del triángulo *ADP* equilátero es 18, entonces $AD=DP=AP=6$.

El $\Delta RAD \approx \Delta MBC \Rightarrow RD=MC=a$

El cuadrilátero *RMCD* es un romboide, cuyo centro es *O`*. (*O* es el centro del cuadrado *ABMR*).

En el triángulo *AMD* por el teorema de los puntos medios $x = 6/2 = 3$



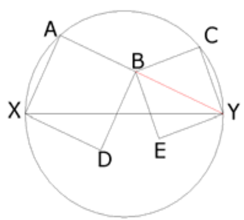
Propuesto y Resuelto en pizarra en un Seminario de Geometría - Año 1992-Lima-Perú

Problema 8

Un cuadrado *XABD* de lado 1, esta dentro de un círculo de diámetro $XY = 2$. El punto *A* esta en la circunferencia. Otro cuadrado *YCBE* con *C* en la circunferencia es trazado. Hallar la relación entre las áreas de *XABD* y *YCBE*

Fuente: 2002 UK Senior Mathematics Challengue

Solución



Como *XY* es un diámetro, ***siempre*** subtiende un triángulo rectángulo, y como *XAB* = 90º, prolongando *AB* necesariamente pasa por *Y*, y a su vez es diagonal de *YCBE*. Llamamos, *p* al lado del cuadrado *XABD* y *q* al lado del cuadrado *YCFE*.

Aplicamos Pitágoras:

$p^2+(p+\sqrt{2}\,q)^2 = (2r)^2,$

$p^2+p^2+2\sqrt{2}\,pq+2q^2 = 4r^2,$

$p^2+\sqrt{2}\,pq+q^2 = 2r^2$

Resolviendo usando $r=1$ y $p=1$ (datos), encontramos la relación: $\dfrac{S_{XABD}}{S_{YCBE}} = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

N.T: Muestra la simpleza de la aplicación de una propiedad o teorema muy conocido pero escondido en el problema, creo que es posible resolverlo prolongando BC hasta X y planteando las ecuaciones. Esto también es válido.

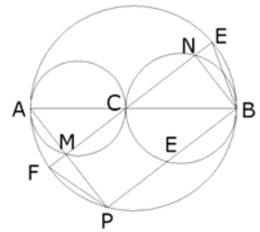
Solución: Aparecida en Problem of the Week de Crux Matematicorum – por Ian Vanderburgh – Traducida y adaptada por Aldo Gil

Problema 9

El punto *C* esta en un segmento *AB*. Una línea recta que pasa por *C* intercepta al círculo de diámetro *AB* en *E* y *F,* y a los círculos de diámetros *AC* y *CB* en *M* y *N* respectivamente. Probar que *MF* = *EN.*

Fuente: Mathematics Competitions in Finlandia 2000-2001-High School

Solución



En la figura, la línea *AM* es prolongada hasta cortar al círculo principal en *P*. Debido a que *AC* y *AB* son diámetros, $\angle AMC$ y $\angle APB$ son triángulos rectángulos Las dos cuerdas *EF* y *BP* son ángulos rectos. Las cuerdas *EF* y *BP*, ambas perpendiculares a *AP*, son paralelas entre si. De aquí, *EFPB* es un trapezoide isósceles. Como *BC* es diámetro, $\angle BNC=90º$. El triángulo rectángulo es *MFP* y *NEB* son congruentes, y es fácil deducir que $MF=EN$.

N.R: Por si acaso esto se cumple debido a que aparte de ser congruentes, son iguales porque $MP=BN$.

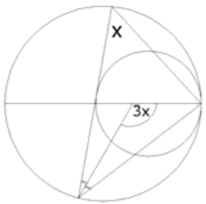
Solución: Crux Matematicorum Nº 6 – Octubre 2004 pMiguel Covas-Mallorcaor-Traducida, adaptada y comentada por Aldo Gil.

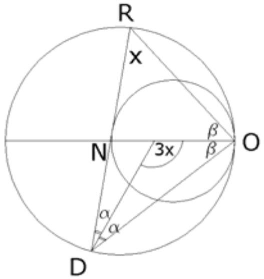
Problema 10

Del gráfico, calcular: *x*

Radio mayor = 2. Radio menor

Fuente: Geometría – Puntos Notables – DiDy Ricra – Lima Peru-1998





Solución

Por ser *N* centro, $\angle RON = \angle DON = \beta$

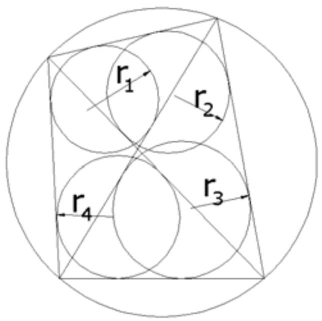
En el triángulo *RON* (*I* es incentro)

Entonces: $3x = 90 + \dfrac{x}{2}$, de donde $x=36º$

Resuelto por el autor (del libro, yo no)

Bien amigos, aquí concluimos este número 15, fuiiii! Que manera de hacer dibujitos, espero que les hayan gustado, tengo una amplia gama de problemas y es difícil escoger lo que uno cree que es lo mejor, espero haber atinado en algo.

Finalmente les dejo un teorema japonés, poco conocido (por lo menos por mi) a ver si lo demuestran si les agrada y publicamos la solución el próximo número.



Teorema Japonés

La suma de las longitudes de los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos que determina una diagonal de un cuadrilátero inscrito, es igual a la suma de las longitudes de los radios de las circunferencias inscritas a los dos triángulos determinados por la otra diagonal.

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4$$

Hasta la próxima… espero sus colaboraciones, para que el esfuerzo no sea de uno solo

Aldo Gil Crisóstomo
Lima-Perú