Problema 1

Les agradeceré me ayuden a resolver este problema (la verdad yo lo resolví pero la respuesta no esta en la clave; me sale 130 litros). El enunciado es así:

Se tiene un recipiente lleno de vino, se saca el 30% de lo que no se saca, luego se vuelve a sacar el 25% de lo que no se saca y al final se devuelve tanto lo que como no se devuelve. Calcule el volumen de dicho recipiente, si al final no se devolvió 10 litros

Solución

Veamos paso a paso el problema:

Se tiene un recipiente lleno de vino, se saca el 30% de lo que no se saca

El recipiente y, contiene una cantidad x más el 30% de x que es lo que se va a sacar, $y=x+0,3x$

Luego se vuelve a sacar el 25% de lo que no se saca

lo que queda en el recipiente x, equivale a z más el 25% de z: $x=z+0,25z$

Al final se devuelve tanto como no se devuelve, 10 litros

De lo que hemos sacado $0,3x$ y $0,25z$, se devuelve la mitad que son 10.

$$\frac{0,3x+0,25z}{2}=10$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$x=40$

$z=32$

$y=52$

Espero que haya quedado claro

Solución: Resuelto por Fº Javier Palencia-Dpto. Matemática Aplicada-UCM

Problema 2

En el plano nos dan una recta r y tres circunferencias tangentes a r y externamente tangentes entre sí (cada una tangente a las otras dos). Probar que el triángulo formado por los centros de las circunferencias es obtuso.

Fuente: propuesto por Diana Barredo en Matracas Junio 2006

Solución

Sean r_1, r_2, r_3 los radios de las circunferencias con $r_1<r_2<r_3$.

Como todas son tangentes entre sí, tenemos que se forma un triángulo de lados r_2+r_3, r_2+r_1, r_1+r_3 donde el lado mayor es r_2+r_3. Hay que ver que el ángulo opuesto a este lado mayor es obtuso (a mayor lado se opone mayor ángulo) y de esta forma el triángulo obtenido será obtusángulo.

Llamemos C al vértice opuesto al lado r_2+r_3. Aplicamos el Teorema del Coseno a C: $(r_2+r_3)^2=(r_2+r_1)^2+(r_1+r_3)^2-2(r_2+r_1).(r_1+r_3)\cos C$

Despejando:

$$\cos C=\frac{(r_2+r_1)^2+(r_1+r_3)^2-(r_2+r_3)^2}{2(r_1+r_2)(r_1+r_3)}$$

y operando en esta expresión llegamos a que: $\cos C=\dfrac{r_1(r_2+r_1+r_3)-r_2.r_3}{r_1(r_1+r_2+r_3)+r_2.r_3}$; dividimos por $(r_1+r_2+r_3)$ y nos queda:

$$\cos C=\frac{r_1-(r_2.r_3/(r_3+r_2+r_1)}{r_1+r_2.r_3/(r_3+r_2+r_1)}.$$

Razonando sobre el numerador lo que nos queda es algo negativo entre algo positivo, entonces cos C es negativo. Luego el ángulo en C es > 90º.

Solución: Mariola Martínez

Epa!!! Que nuestro amigo Ignacio, encontró un razonamiento algo inusual (en la solución de Mariola), y comentó la siguiente solución, muy interesante:

No veo como razonas que el numerador es negativo ... Yo hallaría r_1 en función de r_2 y r_3: $(r_2 - r_1)^2 + x^2 = (r_2 + r_1)^2$

$(r_3 - r_1)^2 + y^2 = (r_3 + r_1)^2$

$(x + y)^2 + (r_3 - r_2)^2 = (r_3 + r_2)^2$ donde x es la distancia entre las proyecciones de los centros de las circunferencias de radios r_2 y r_1, e y es la distancia entre las proyecciones de los centros de las circunferencias de radios r_1 y r_3, siempre sobre la recta r. De las dos primeras, $x=\dfrac{2}{\sqrt{r_1.r_2}}$; $y=\dfrac{2}{\sqrt{r_1.r_3}}$. Sustituyendo en la tercera y despejando r_1, $r_1=\left(\dfrac{r_2r_3}{\sqrt{r_2}}+\sqrt{r_3}\right)^2$ (de otra forma: $\dfrac{1}{\sqrt{r_1}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_3}}$). Con esto obtenemos $(r_2+r_1)^2 + (r_1+r_3)^2 -(r_2+r_3)^2 = 2(r_2+r_1(r_2+r_3) - r_2.r_3$

$$=\frac{-2(r_2+r_3).\sqrt{r_2.r_3}+3r_2r_3}{(2.\sqrt{r_2.r_3}+r_2+r_3)^2}$$

<0, por lo que se trata de un triángulo obtusángulo, que se aproxima a uno rectángulo cuando r_2 ó r_3 tienden a 0 ó a infinito. No se si puede hacerse de forma más simple, pero no la veo ...

Solución: Ignacio Larrosa Cañestro A Coruña (España)

Problema 3

Encontrar el mínimo valor de n natural para que se verifique que cada uno de los términos de esta progresión sean enteros consecutivos.

$\{n+\sqrt{n}\}$, $\{n+1+\sqrt{n+1}\}$, $\{n+2+\sqrt{n+2}\}$, ... , $\{n+a+\sqrt{n+a}\}$ con a natural {x} significa Parte entera de x.

Fuente: Propuesto por Patto Wed, 7 Jun 2006

Solución

Si queremos que los a términos de la sucesión sean enteros consecutivos, $n+k$ no puede ser un cuadrado perfecto, con k recorriendo los naturales de 1 hasta a. Veamos por qué:

Supongamos que $n+k_0=m^2$, siendo m natural. Entonces, el término $k0$-ésimo de la sucesión sería $\{n + k_0 - 1 + R(n + k_0 - 1)\} = n+k_0-1+m-1 = n+k_0+m-2$, y el siguiente sería $\{n + k_0 + R(n + k_0)\} = n + k_0 + m$, que no son consecutivos. Por lo tanto, el único cuadrado perfecto que puede haber en la sucesión es el primer término.

Si $a=2j+1$, el menor n a escoger es j^2. El siguiente cuadrado perfecto es $(j+1)^2$, y $(j+1)^2-j^2=a$, por lo que cualquier $n<j^2$ provocará que en la sucesión haya un cuadrado.

Si $a=2j$, el menor n a escoger es también j^2. El siguiente cuadrado perfecto está $a+1$ números después, luego no se alcanza en la sucesión de los $n+k$, y si cogemos un n menor, en algún momento de la sucesión (igual que antes) también nos toparemos con un cuadrado. En conclusión, $n=\{\frac{a}{2}\}^2$.

Solución: Alberto Castaño Domínguez

Problema 4

Se tiene una caja de forma de paralelepípedo rectangular, si el largo es el doble del ancho y la suma de las tres dimensiones es igual a 14. Calcular la altura para que la superficie total tenga área máxima.

Fuente: Olimpo Matemático: Concurso de becas Nº 2-Lima Perú – Problema 6- Recopilado por Aldo Gil

Solución

Sea: $x=$ ancho $\Rightarrow 2x=$largo $\Rightarrow$ altura$=14-3x$

El área total es la suma de las áreas de sus seis caras:

$Area_{TOTAL} = 2.\,(2x^2 + 2x.(14 - 3x) + x(14 - 3x)) = 2.(42x - 7x^2)$

El área es una función cuadrática de "x", que alcanza su máximo en el mismo valor que el polinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c = -7x^2 + 42$. Como el coeficiente de mayor grado es negativo ($a=-7 < 0$), su represtación gráfica es una parábola con sus ramas hacia abajo y que alcanza el máximo en su vértice:

Por lo tanto, el máximo se alcanza en $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{42}{-14} = 3$. La altura del paralelepípedo de área máxima es: *altura= 14-3x=5*

Solución: Diana Barredo – España – Ciudad de León

Problema 5

Encontré este problema y me gustaría saber si se puede solucionar de alguna manera más elegante que por geometría analítica:

En el triángulo ABC, el lado BC es el doble que el AB, y el ángulo en A es el triple que el ángulo en C. ¿Cuál es el ángulo en C?

Fuente: Propuesto por Daniel Ricardo Suárez

Solución

Basta con aplicar el Teorema del Seno:

$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$

$\frac{2c}{sen3C} = \frac{c}{senC} \Rightarrow sen3C = 2.senC$.

Pero: $sen\ 3C = sen\ (C + 2C) = sen\ C.\ cos\ 2C$

$+ cos\ C.\ sen\ 2C$

$= sen\ C.(cos^2C - sen^2C) + 2sen\ C.cos^2\ C$

$= sen\ C.(3cos^2C-sen^2C) = sen\ C\ .(3-4.sen^2C)$

Por tanto, queda:

$sen\ C.(3 - 4\ sen^2C) = 2sen\ C \Rightarrow 1 = 4sen2C \Rightarrow sen\ C = \pm\frac{1}{2}$. Pero como C es un ángulo menor que 180º, solo nos vale $sen\ C = \frac{1}{2}$. Esto ocurre para C = 30º y C = 150º, pero como $3C$ también tiene que ser menor que 180º, solo nos queda C = 30º, $A = 3C$ = 90º y B = 60º. Es decir, un cartabón.

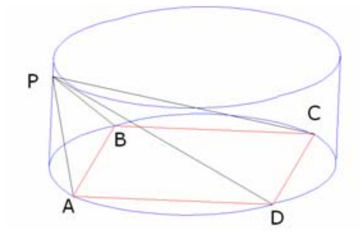
Solución: Ignacio Larrosa Cañestro

Problema 6

Calcular AP si $PD=13$, $PB=5$, $PC=12$ de la figura y $ABCD$ es un rectángulo.

Fuente: Olimpo Matemático: Concurso de becas Nº 2-Lima Perú –Problema 5- Recopilado por Aldo Gil

Solución:



Al ser *ABCD* un rectángulo, sus cuatro ángulos son rectos y las diagonales se cortan en su punto medio, siendo éste el centro del rectángulo, que denotaré por *O*.

Consideremos un sistema de referencia ortonormal tridimensional centrado en *O*, centro del rectángulo, con ejes *OX* y *OY* paralelos, respectivamente, a los segmentos *AD* y *AB*. Podemos asociar las siguientes coordenadas en el sistema de referencia elegido:

$O = (0,0,0)$ $A = (-a,-b,0)$ $B = (-a,b,0)$
$C = (a,b,0)$ $D(a,-b,0)$

Sea un punto: $P = (x, y, z)$

Por hipótesis:

1. $PD=13, \Leftrightarrow (x-a)^2+(y+b)^2+z^2= 169$
2. $PB=5 \Leftrightarrow (x+a)^2+(y-b)^2+z^2= 25$
3. $PC=12 \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+z^2=144.$

Como:

$PA^2 = (x + a)^2 + (y + b)^2 + z^2$ y $PD^2 = (x - a)^2 + (y + b)^2 + z^2$

Se observa que: $PA^2 - PD^2 = 4ax \Leftrightarrow PA^2 = PD^2 + 4ax$

- Por hipótesis,

$PD = 13, \Rightarrow PA^2 = 169 + 4ax$

- Restando a la tercera la segunda:

$ax = \dfrac{-119}{4}$. Por lo tanto:

$PA^2 = 169 - \dfrac{119}{4} = \dfrac{557}{4}$; y $PA = \dfrac{\sqrt{557}}{2}$.

Nota: El punto *P* podría haber sido cualquiera del espacio, puesto que no se ha utilizado la hipótesis de que pertenezca a la superficie lateral de un cilindro de base la circunferencia circunscrita al rectángulo *ABCD*.

Solución: Diana Barredo – España – Ciudad de León

Problema 7

Si x<y<z, resolver:

$$\frac{2x}{1-x^2} = y.\frac{2y}{1-y^2} = z.\frac{2z}{1-z^2} = x$$

Fuente: Propuesto por Kenneth Corbin, New York

Solución

Tiene una solución encantadoramente artificiosa, usando funciones trigonométricas, cuando lo usual es al revés.

Sea $x= \tan a$, para algún $a \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Entones el sistema de ecuaciones queda así:

$$y = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} = \tan 2a,\ z = \frac{2\tan 2a}{1-\tan^2 2a} = \tan 4a,\ x = \frac{2\tan 4a}{1-\tan^2 4a} = \tan 8a$$

Entonces: $\tan 8a=x=\tan a$

$\Rightarrow 8a=a+n\pi$ para un entero n. $\Rightarrow a=\frac{n\pi}{7}$ para un entero n; esto, a su vez, para algún entero n, $y = \tan\left(\frac{2\pi n}{7}\right)$ y $z = \tan\left(\frac{2\pi n}{7}\right)$. En consecuencia: $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$, n esta restringido al conjunto (-3,-2,-1,0,1,2,3). Es fácil verificar que n=-3, hace $x<y<z$. Por consiguiente, la única solución es:

$$x = \tan(-\frac{3\pi}{7}) = -\tan(\frac{3\pi}{7}),\ y = \tan(-\frac{6\pi}{7}) = \tan(\frac{\pi}{7}),\ z = \tan(-\frac{12\pi}{7}) = \tan(\frac{2\pi}{7}).$$

Solución: Por el autor … del problema digo, y traducida por Aldo Gil

Aquí ya vienen unos de Olimpiadas Brasileras, lo que pasa es que encontré la revista en uno de mis cajones, y me di a traducir todo lo que pude (aun queda algo de material traducido), y la verdad los vi bastante bonitos…. Ahí van

---

Problema 8

Joao compró un libro que tenía 200 páginas. Su hermano menor arrancó 25 hojas y sumó los números de las 50 páginas. Explique porque el resultado de esta suma no puede ser igual a 1998.

Observación: cada hoja tiene dos páginas. La primera hoja tiene las páginas 1 y 2, y así sucesivamente.

Fuente: XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA-Segunda Fase - Nivel 1-Problema 1

Solución

Como cada hoja contiene dos páginas tales que la suma de sus respectivos números es impar, si agregamos las 25 hojas, siempre la suma será impar, por lo tanto la suma no podrá ser nunca igual a 1998.

Solución: Revista Eureka Nº 4-Traducido por Aldo Gil

Problema 9

Una recta que pasa por los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero convexo forma ángulos iguales con ambas diagonales. Mostrar que las diagonales tienen la misma longitud.

Fuente: XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA-Segunda Fase - Nivel 3-Problema 3

Solución

Sea *ABCD* el cuadrilátero, *M,N,P* y *Q* los puntos medios de los lados *AB, BC, CD* y *DA*, respectivamente. *MN* y *PQ* son paralelos a la diagonal *AC* y miden la mitad de su longitud, mientras que *NP* y *QM* son paralelos a la diagonal *BD* y también miden la mitad de su longitud. Asimismo, *MNPQ* es un paralelogramo. Las condiciones del problema dicen que la recta que pasa por los puntos medios de los lados opuestos de *ABCD* (digamos *MP* sin pérdida de generalidad) forman ángulos iguales con *AC* y *BD* , por lo tanto como *PQ* y *NP* , donde *MP* es bisectriz de $\angle NPQ$. Luego *MNPQ* debe ser un rombo, donde $MN = NP$, es por lo tanto $AC = BD$ (pues $MN = AC / 2$ y $NP = BD / 2$).

Solución: Revista Eureka Nº 4-Traducido por Aldo Gil

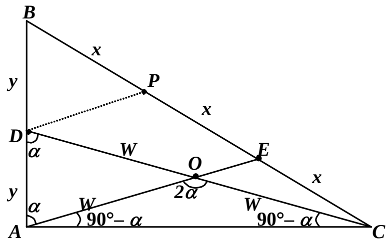
Problema 10

En un triángulo *ABC*, *D* es punto medio de *AB* y *E* es un punto de *BC* tal que *BE* = 2 ∠ *EC*. Dado que los ángulos $\angle ADC$ y $\angle BAE$ son iguales, hallar el ángulo $\angle BAC$.

Fuente: XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA-Tercera Fase - Nivel 2-Problema 2

Solución:

Llamamos *P* al punto medio de *BE.* En consecuencia $BP = PE = EC = X$, y $BD = DA = y$.



Sea *O* la intersección de *AE* con *DC.* El triángulo *DOA* es isósceles, por lo tanto $AO = DO$. (Llamaremos *AO* como *W).* El segmento *DP* es la base media del triángulo *ABE*, pues *D* es punto medio de *AB* y *P* es punto medio de *BE* , entonces *DP // AE.* Consecuentemente los triángulos *OCE* y *DCP* son semejantes, en una razón de 1/2.

Entonces tenemos $\frac{CO}{CO+W} = \frac{1}{2} = D$, $2CO = CO + W = D$, $W = CO$.

Llamamos al ángulo $\angle OAD$ como α , $\angle ADO$, también será α , y $\angle OAC$, será 2α , pues es externo al triángulo *DOA*. Como $AO = W$ y $OC = W$ el triángulo *ADC* es isósceles y el ángulo de la base es $90° - \alpha$. El ángulo $BAC = \alpha + 90° - \alpha$, $B\hat{A}C = 90°$.

Solución: Revista Eureka Nº 4- por Daniel Pinheiro Sobreira -Traducido por Aldo Gil

CORRETELA

Al estilo de las grandes revistas, pondremos a tono nuestra revistita (nuestra porque es de todos, yo solo las escribo), y pondremos una sección que llamaremos corrección o algo así, caray todas la tienen y sabes que me da gusto haber encontrado este ligero error, pues creo la da cachet a la revista.

Alberto Castaño Domínguez wrote (medio huachafona la frase)

Hola Aldo, ¿qué tal? Soy Alberto, de la lista de Matracas.

El otro día estuve revisando el correo y vi el que mandé a matracas como respuesta de los problemas que planteaste del número 8, Problema 4, de tus boletines. El caso es que en mi solución del polinomio, hay un error, que al menos, no afecta nada en la solución al problema. En ella, afirmo que como f es un polinomio, tiene un punto fijo, cosa que claramente no es cierta, por ejemplo, con $f(x)=x^2+1$. Ese párrafo debería decir que de existir un punto fijo, también sería solución de la ecuación, por el mismo motivo que argumento. Entonces, el paso siguiente es comprobar que hemos tenido suerte (porque no tendría por qué haberlo). A partir de ahí, la demostración es idéntica. Lo dicho. Espero que no te cause muchos problemas. Un saludo.

Oiga: si algo tiene nuestro idioma es que le podemos inventar las palabras que nos de la gana, así que … se queda con Corretela

Echo shi espero que cuando encuentren algún error, ya sea de tipeo o conceptual, están en la obligación moral de hacerlo notar, no sea que algún amigo arrastre el error y deje nuestra revistita como zapatilla cuando nombren la procedencia. Ok?.

Hasta la próxima…

Aldo Gil Crisóstomo

Lima-Perú