Iniciamos el número 13 de nuestros fascículos, con la satisfacción de los saludos de los amigos y amigas que nos felicitan y nos dicen que los están utilizando en sus escuelas, ¡ pero si para eso es!!!.

La verdad muy satisfecho, gracias por sus aportes, y bueno esperamos mas.

Aquí he incluido unos problemitas de la revista Eureka Brasilera, alguno de Olimpiadas de Brasil, y otras soluciones de las pruebas de Exámenes becarios propuestos desde Lima, resueltos por nuestra amiga Diana Barredo desde España.

Joder que ya esta medio internacional nuestra revistita eh??

Sin mas floro empezamos nuestra sesión

Problema 1

Escriba 1998 como la suma de (un número arbitrario de) partes de modo que el producto de las partes sea lo mayor posible.

Fuente: Eureka Revista Nº 2 - Problema Propuesto Nº 4

SOLUCION

Observe inicialmente que, dado $n \in$ N,

Si n ($n > 4$) es par, tenemos $\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} > n$

Si n ($n > 3$) é impar, tenemos $\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right) > n$

Sea $1998 = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots n_k$ y $P = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots n_k$

Con las observaciones (I) y (II) debemos tener $n_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y como $4 = 2 \cdot 2$ podemos sustituir 4 por "2 + 2" y tenemos $n_i \in \{1, 2, 3\}$; luego $P = 1^{\alpha} \cdot 2^{\beta} \cdot 3^{\delta}$. Es evidente que $\alpha = 0$; pues si $\alpha = 1$, "1 + 2" puede ser sustituido por un 3 y "1 + 3" puede ser sustituido por "2 + 2". También $\beta \leq 2$, pues "2 + 2 + 2" puede ser sustituido por "3 +3" ($3 \cdot 3 > 2 \cdot 2 \cdot 2$) y en consecuencia $P = 2^{\beta} \cdot 3^{\delta}$ con (β = 1 ó 2). Como $1998 = 3 \cdot 666 + 0$, $P = 3^{666}$ luego $S = \underbrace{3+3+3+\ldots+3}_{666 vezes}$

Solución: Eureka Revista Nº 2 – Traducido y adaptado por Aldo Gil

---

Problema 2

Determinar los valores de x (todos) de tal forma que A sea un número real, si:

$$A = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 15} - \sqrt{x+7}}{\sqrt{x^2 + x + 4} - \sqrt{x+1}}}$$

Fuente: Propuesto por Moisito-Foro 100cia.

Solución

Consideremos el cuadrado de la expresión anterior, y lo racionalizamos:

$$A^2 = \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 15} - \sqrt{x+7}}{\sqrt{x^2 + x + 4} - \sqrt{x+1}} = \frac{\left(\sqrt{x^2 - 8x + 15} - \sqrt{x+7}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + x + 4} - \sqrt{x+1}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x+1}\right)}$$

La condición necesaria y suficiente para que A sea real es que su cuadrado sea un número real NO negativo. Luego estudiaremos para qué valores de $x \in \Re$ se verifican las dos condiciones: $A^2 \geq 0$ y A^2 real.

$$A^2 = \frac{\left(\sqrt{x^2 - 8x + 15} - \sqrt{x+7}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x+1}\right)}{x^2 + 3}$$

El denominador es siempre real y positivo (para cualquier valor de x), luego vamos a estudiar cuándo el numerador es real y no negativo (positivo o nulo).

a) Para que sea real $\left(\sqrt{(x-5)(x-3)} - \sqrt{x+7}\right) \cdot \left(\sqrt{x\text{^}2 + x + 4} + \sqrt{x+1}\right)$ es condición necesaria y suficiente que todos los radicandos sean números reales NO negativos:

$(x-5)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ ó $x \geq 5$

$(x+7) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$

$(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

$(x^2 + x + 4) \geq 0 \quad \forall x \in \Re$

$\left(\sqrt{(x-5)(x-3)} - \sqrt{x+7}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x+1}\right) \in \Re \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq x \leq 3$ ó $x \geq 5$

b) Para que $\left(\sqrt{(x-5)(x-3)} - \sqrt{x+7}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x+1}\right) \geq 0$

Supuesto que todos los operados son reales, como es un producto de dos factores, uno de los cuales (el segundo) es siempre estrictamente positivo, la condición anterior es equivalente a:

$$\sqrt{(x-5)(x-3)} - \sqrt{x+7} \geq 0$$

$$\sqrt{(x-5)(x-3)} - \sqrt{x+7} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x-5)(x-3)} \geq \sqrt{x+7} \Leftrightarrow (x-5)(x-3) \geq x+7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot (x-8) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ o } x \geq 8$$

La intersección de los conjuntos obtenidos en *a*) y *b*), son todos los valores de x para los que el valor de la expresión A, es un número real.

$$\{-1 \leq x \leq 3 \text{ ó } x \geq 5\} \cap \{x \leq 1 \text{ ó } x \geq 8\} = \{-1 \leq x \leq 1\} \cup \{x \geq 8\}$$

Solución: Galvanert

Problema 3

Sea ABC un triángulo, M pie de la bisectriz interna del ángulo A y N pie de la bisectriz interna del ángulo B. Suponga que MN sea bisectriz del ángulo AMC. Calcule el ángulo A.

Fuente: Olimpíada Brasileira de Matemática Problemas de treinamento para a terceira fase 1997-Nº 5

Solución

Por el teorema de las bisectrices, $\frac{AN}{NC} = \frac{c}{a}$ y $\frac{BM}{MC} = \frac{c}{d} \Rightarrow MC = \frac{ab}{b+c}$, como MN es bisectriz de $\angle AMC$ debemos tener $\frac{MA}{MC} = \frac{AN}{CN} = \frac{c}{a}$, donde $MA = \frac{bc}{b+c}$ (pues $MC = \frac{ab}{b+1}$ por la ley de senos aplicada a los triángulos ABC y ABM tenemos:

$$\frac{senA}{senB} = \frac{a}{b} = \frac{\frac{ac}{b+c}}{\frac{bc}{b+c}} = \frac{BM}{MA} = \frac{sen\,(A/2)}{senB},$$ y

por tanto $sen\ (A/2) = sen\ A = 2\ sen\ (A/2)\cos\ (A/2) \Rightarrow$

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow A = \frac{2\pi}{3}.$$

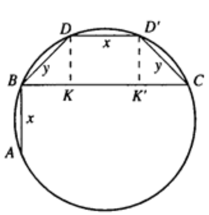
Solución: Eureka Revista Nº 3 – Traducido y adaptado por Aldo Gil

Problema 4

Sean tres puntos A, B y C pertenecientes a una circunferencia de centro O tales que $\angle AOB < \angle BOC$. Sea D punto medio del arco AC que contiene el punto B. Sea K el pie de la perpendicular a BC por D. Probar que $\overline{AB} + \overline{BK} = \overline{KC}$.

Fuente: Olimpíada Brasileira de Matemática Problemas de treinamento para a terceira fase 1997-Nº 1

Solución



Sean $AB = x$, $BD = y$; marcamos D' tal que $D'C = y$. Entonces $D'D = x$ por ser D punto medio de AC y resulta $DD' // BC$. Si K' es el pie de la perpendicular a BC por D', entonces tenemos:

$AB = DD' = KK'$ e $BK = K'C$

$AB + BK = KK' + K'C = KC$.

Solución: Eureka Revista Nº 3 – Traducido y adaptado por Aldo Gil

Problema 5

Si: $sen(x+y) = senx + seny$, calcular: $\frac{sen\,x \cdot sen\,y}{(1+\cos x)(1+\cos y)}$

Fuente: Olimpo Matemático: Concurso de becas Nº 1-Lima Perú – Problema 7- Recopilado por Aldo Gil

Solución:

$sen(x+y) = senx + seny \Leftrightarrow sen\,x\cdot\cos y + \cos x \cdot sen\,y = senx + seny \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow sen\,x\cdot(\cos y - 1) = sen\,y\cdot(1-\cos x) \Leftrightarrow \boxed{sen\,x = -\frac{1-\cos x}{1-\cos y}\cdot sen\,y}$

Y, sustituyendo en la expresión dada:

$$\frac{senx \cdot seny}{(1+\cos x)(1+\cos y)} = \frac{-\frac{1-\cos x}{1-\cos y}\cdot sen^2 y}{(1+\cos x)(1+\cos y)} = -\frac{\frac{1-\cos x}{1-\cos y}\cdot(1-\cos^2 y)}{(1+\cos x)(1+\cos y)} = -\frac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos y)}{(1+\cos x)\cdot(1+\cos y)} = -\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2$$

Solución: Diana Barredo – España – Ciudad de León

Problema 6

Dos caños pueden llenar un estanque de 24 litros en 5 y 6 horas, cada uno funcionando individualmente, mientras que un desagüe podría vaciar el estanque en 100 horas. Si se abren las tres llaves y se cierran apenas se llena el estanque. Calcular la cantidad de litros de agua que se fueron por el desagüe.

Fuente: Olimpo Matemático: Concurso de becas Nº 2-Lima Perú – Problema 2- Recopilado por Aldo Gil

Solución:

- El primer caño, él sólo, llena el estanque en 5 horas luego, dicho caño, echa agua a razón de 4,8 litros por hora.
- El segundo caño, él sólo, llena el estanque en 6 horas luego, dicho caño, echa agua a razón de 4 litros por hora.
- El desagüe vacía los 24 litros del estanque 100 horas luego, por el desagüe, se pierde de agua a razón de 0,24 litros por hora.

a) Vamos a calcular en cuanto tiempo se llena el estanque estando abiertos los dos caños y el desagüe simultáneamente.

Según lo anterior, desde que se abren los dos caños y el desagüe, en una hora el estanque acumula 4,8 litros (del caño 1) más 4 litros (del caño 2) menos 0,24 litros (que se perdieron por el desagüe). Es decir, el estanque se llena a razón de 8,56 litros por hora.

Si llamamos "x" al número de horas que tardaríamos en llenar el estanque (24 litros)

$$x=\frac{24}{8{,}56}=\frac{2400}{856}=\frac{300}{107}$$ (Aproximadamente 2 horas, 48 minutos, 13 segundos)

b) Vamos a calcular cuánto agua se ha perdido por el desagüe en el tiempo que se ha tardado en llenar el estanque.

Como el desagüe ha perdido a razón de 0,24 litros por hora, y el estanque ha tardado en llenarse 300/107 horas, en total se ha perdido:

$$0{,}24\cdot\frac{300}{107}=\frac{72}{107}\approx 0{,}673$$ litros (aproximadamente 673 cm^3)

Solución: Diana Barredo – España – Ciudad de León

Problema 7

Encontrar los valores m tal que el sistema:

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x}+\sqrt[3]{y}&=x\\ \sqrt{x^3}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2&=mx\end{aligned}\right\}$$

tenga soluciones racionales para x e y.

Solución:

Si sólo se exige que el sistema tenga alguna solución racional en x e y, entonces el problema es trivial pues, sea cual sea el valor de m el sistema tiene una solución racional, a saber, $x=y=0$.

Luego, vamos a resolverlo exigiendo que todas las soluciones del sistema sean racionales en x e y. Además, podemos suponer que $x\neq 0$ pues en caso contrario la solución es $x=y=0$ que es racional.

- Despejamos $\sqrt[3]{y}$ en la primera ecuación: $\sqrt[3]{y}=x-\sqrt{x}$ ....(I)

- Sustituimos en la segunda y operamos: $x\sqrt{x}+\left(x-\sqrt{x}\right)^2=mx \Leftrightarrow x^2-x\sqrt{x}+x=mx$

Como hemos supuesto $x\neq 0$, podemos dividir ambos miembros entre x

$$x-\sqrt{x}+1=m \Leftrightarrow \sqrt{x}=x+(1-m) \Leftrightarrow x^2+(1-2m)x+(1-m)^2=0 \ldots\ldots \quad (II)$$

La condición para que las soluciones de esa ecuación de segundo grado sean racionales es: $m\in Q$ y, además, el discriminante sea el cuadrado de un número racional.

$$(1-2m)^2-4(1-m)^2=t^2,\quad t\in Q \quad\Leftrightarrow\quad 4m-3=t^2,\quad t\in Q$$

La condición buscada es: $m=\dfrac{t^2+3}{4},\quad t\in Q$ ....(III)

a) Para estos valores de m, obviamente, la solución es racional en x pues dichos valores se ha buscado para que eso ocurra.

b) A la vista de la ecuación (I), la condición necesaria y suficiente para que la solución sea racional en y es que la solución en x sea un cuadrado perfecto.

Resolviendo la ecuación (II), para los valores de m buscados (III), se tiene:

$$x=\frac{(2m-1)\pm t}{2}=\left(\frac{t\pm 1}{2}\right)^2$$

Con lo que, efectivamente, el sistema tiene todas sus soluciones racionales en x e y, para los valores de m:

$$\boxed{m=\frac{t^2+3}{4},\quad t\in Q}$$

Problema 8

El promedio aritmético de "n" números es $3n/2$. Si se aumenta a dichos números: $1,2,\ldots,n$, respectivamente (del primero al n-ésimo). ¿Cuál es el promedio de los números resultantes?

Fuente: Olimpo Matemático: Concurso de becas Nº 2-Lima Perú – Problema 1- Recopilado por Aldo Gil

---

Solución:

Sean $\{a_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ los "n" números dados.

Por hipótesis, su promedio aritmético es $3n/2$, luego: $\dfrac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i=\dfrac{3n}{2}$

Sean $\{b_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$, con $b_i=a_i+i$ $\forall i=1,2\ldots n$

El promedio pedido será:

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i+i)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i+\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}i=\frac{3n}{2}+\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{4n+1}{2}$$

Solución: Diana Barredo – España – Ciudad de León

Problema 9

Sea el polinomio completo y ordenado en x e y no homogéneo, cuyos coeficientes son:

- Del primer término 30 (el de menor grado)
- Del segundo término 27.
- Del tercer término 24, y así sucesivamente.

Hallar el grado del polinomio.

Fuente: Olimpo Matemático: Concurso de becas Nº 2-Lima Perú – Problema 3- Recopilado por Aldo Gil

---

Solución:

Los coeficientes que nos dan por hipótesis son los términos de una progresión aritmética, de primer término 30 y diferencia -3.

30,27,24,21,....

Como el polinomio nos dicen que es completo, ninguno de sus coeficientes puede ser nulo, luego, el número de coeficientes de dicho polinomio coincide con el número de términos positivos de esa progresión.

Término general: $a_n = 30 - 3(n-1)$

$$a_n > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 30 - 3(n-1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3n < 33 \quad \Leftrightarrow \quad n < 11 \quad \Leftrightarrow \quad n \le 10$$

Luego, nuestro polinomio tiene exactamente 10 términos (10 coeficientes).

Un polinomio de grado "p" en dos indeterminadas, x e y, tiene la siguiente forma:

$$P(x,y) = \sum_{k=0}^{p}\sum_{i=0}^{k} a_i x^i y^{k-y}$$

Como nuestro polinomio es completo ($a_i \ne 0 \quad \forall i = 0,1,\ldots k \quad \forall k = 0,1,\ldots,p$), para conseguir un grado "p", necesitamos exactamente:

$$\sum_{k=0}^{p}\sum_{i=0}^{k} 1 = \sum_{k=0}^{p}(k+1) = \frac{(p+2)\cdot(p+1)}{2} \text{ Coeficientes}$$

Como sólo disponemos de 10:

$$\frac{(p+2)\cdot(p+1)}{2} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 + 3p - 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (p-3)\cdot(p+6) = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 3$$

Luego, el grado tiene que ser 3.

Solución: Diana Barredo – España – Ciudad de León

Problema 10

Sobre la circunferencia de un círculo se marcan 100 puntos y se trazan todos los segmentos entre pares de puntos (cuerdas). ¿Cuántos puntos de intersección se forman dentro del círculo, suponiendo que los puntos están en "posición general" (no hay intersecciones triples)?

Fuente: Centro de Investigación en Matemáticas-Noviembre de 1997-Problema 3

Solución

Si consideramos que dados cuatro puntos cualesquiera en el círculo, podemos siempre trazar dos cuerdas (exactamente) de manera que generan una intersección, entonces el número total de intersecciones está dado por el número de subconjuntos de tamaño cuatro que podemos formar con los 100 puntos; es decir, el número de intersecciones está dado por $\binom{100}{4} = 3921225.$

Solución: Salvador Gutiérrez

Bien amigos, llegamos al final de otro de nuestros numeritos, se me quedan en el tintero, una aclaración de un problema aparecido en el número 8, y una acotación por el número anterior.

Esto del campeonato Mundial, me tiene loco, y pues soy uno mas de los débiles que nos apasionamos con este deporte, y caray una vez cada cuatro años no hace daño.

Por eso estoy medio flojón, ya cuando acabe el Mundial me empilo de nuevo.

Hasta la próxima

Aldo Gil Crisóstomo

PD.- Sin molestarse pero mi pronóstico es Brasil Campeón