Problema 1

Arrancamos con fuerza con este problemita que halle en una revista de la Olimpiada Austriaca, y dice así:

Un hexágono convexo satisface las siguientes condiciones:

a) Los lados opuestos son paralelos ($AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$).

b) Las distancias entre los lados opuestos son iguales (esto es, $d(AB,DE) = d(BC,EF) = d(CD,FA)$, donde $d(g,h)$ es la distancia entre g y h.

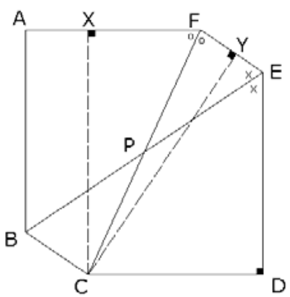
c) $\angle FAB$ y $\angle CDE$ son ángulos rectos.

Demostrar que las diagonales BE y CF se interceptan en un ángulo de 45º.

Fuente: 19th Austrian Polish Mathematical Competition 1996 – Problema 2

Solución

Sean X e Y los pies de las perpendiculares de C a AF,EF respectivamente. (Ver figura)



Como: $AF \parallel CD$, de aquí: $CX = d(AF,CD)$.

Como: $BC \parallel EF$, de aquí: $CY = d(BC,EF)$.

Como: $d(CD,FA) = d(BC,EF)$, tenemos que $CX=CY$. Así, CF biseca el ángulo AFE. En forma similar, BE biseca el ángulo DEF. Sea T la intersección de AF y DE. Como $AB \parallel DE$, y $\angle A=90º$, tenemos $\angle FTE=90º$.

Entonces: $\angle AFE + \angle DEF = (\angle T + \angle TEF) + (\angle T + \angle TFE)$

$= 2\angle T + (\angle TEF + \angle TFE)$

$= 90º \times 2 + 90º = 270º$

Así, tenemos: $\angle FPE = 180º - (\angle PFE + \angle PEF) = 180º - 135º = 45º$

Solución: Crux – Adaptado y traducido por Aldo Gil C.

Problema 2

Con este problemita se tejen muchos otros, como aquel que mas o menos dice "un hombre debe llevar agua a 30 macetas con flores separadas a n metros (entre ellas) desde un pozo de agua, va a la primera y regresa y …" algo así es este

Un albañil debe llenar los cimientos de 30 columnas de hormigón colocadas en línea recta, con una separación de 2,5 metros entre ellas. La mezcladora se encuentra en dirección opuesta a la línea de columnas y a 25 m de la primera. El albañil transporta

la mezcla en baldes que permiten llenar la base de dos columnas en cada viaje. ¿Cuántos metros recorre en total?

Fuente: Propuesto por Nora Berdini

Solución

Con un par de aclaraciones, la primera conceptual, y la segunda de interpretación, viene esta solución:

Antes de nada, una apreciación acerca del enunciado:

1. No tiene sentido hablar de dirección opuesta, sino de sentido opuesto.

2. El problema debería especificar si el albañil vuelve o no al camión después de llenar la última columna.

Como tenemos 30 columnas, que son llenadas de 2 en 2 en cada viaje, podemos considerarlas como 15 parejas, y llamamos a_i, al número de metros que el albañil recorre, desde el camión, para llenar esa *i-ésima* pareja de columnas, con $i=1,2,\ldots15$.

Como la diferencia entre cada dos términos consecutivos de la anterior sucesión es constante, a saber 5 metros, se trata de una progresión aritmética de diferencia 5, y primer término 27,5.

Sumando los 15 términos de la progresión aritmética anterior (semisuma de primero y último por el número de términos)

$a_1 = 25 + 2,5 = 27,5$

$a_{15} = 25 + 15.5 = 100$

$\sum_{1}^{15} a_i = 15 \cdot \frac{a_1 + a_{15}}{2} = 15 \cdot \frac{27,5 + 100}{2} = 956,25$ metros.

Dado que para llenar el caldero, el albañil ha de regresar al camión tras cada uno de los viajes anteriores, todos los metros que recorre con el caldero lleno (viajes de ida), los ha de recorrer de nuevo con el caldero vacío (viajes de vuelta al camión) salvo, quizás, el último de ellos:

a) Si el albañil vuelve al camión tras llenar la última pareja, la distancia total recorrida es el doble de la anterior, luego recorre en total 1912,5 metros.

b) Si el albañil no regresa al camión tras llenar la última pareja, la distancia total recorrida es la anterior menos el último viaje de retorno, es decir, la anterior menos la distancia del camión a la última columna (100 metros). Luego, el albañil recorrería 1812,5 metros.

Solución: Diana Barredo Blanco

Problema 3

Siempre revisando en la búsqueda de material, me encuentro este problemita sobre Cuatro Operaciones aritméticas, me parece interesante plantearlo.

Un tren tarda 8 segundos en pasar por delante de un observador y 38 segundos en cruzar una estación de longitud *E*. Sabiendo que si aumentamos la velocidad del tren en 6 *Km/h.*, tardaría en cruzar por delante de otro observador 6 segundos. Se pide hallar la longitud del tren, la longitud de la estación y la velocidad del tren.

Fuente: Folleto Cuatro Operaciones – Germán Hernández – Lima Perú

Solución

Veamos cuantos metros demás recorre el tren con su nueva velocidad por segundo.

En 3600 segundos recorre 6000 metros más.

En un segundo recorrerá 5/3 metros. *Ok?*

Si la primera vez recorre su longitud propia en 8 segundos y en la segunda vez en 6 segundos, esto quiere decir que en la primera vez recorrió 1/8 de su longitud en un segundo, mientras que en la segunda vez en ese mismo tiempo recorre 1/6. Entonces por cada segundo recorre en la segunda vez: 1/6-1/8=1/24 de la longitud del tren, mas que en la primera vez.

Esto quiere decir que 1/24 de la longitud del tren es equivalente a 5/3 de metros. *Me siguen ...?*

Entonces la longitud del tren será: $L = \frac{5/3}{1/24} = 40$ metros.

Por otro lado en los 38 segundos logra recorrer su propia longitud y la de la estación, es decir 38-8=30 segundos es lo que tarda en cubrirá la distancia E. Por lo tanto $E = \frac{30.40}{8} = 150$ metros. Y la velocidad será $V = 40/8 = 5$ metros por segundo =18 kilómetros por hora.

Solución: Por el autor y remozado por Aldo Gil.

Problema 4

La superficie de una cancha de fútbol es de 2175 metros cuadrados. El ancho mide 29 metros y el perímetro del área mayor es 2/3 del largo de la cancha. ¿Cuanto mide el área mayor de ancho si el largo es 1/2 del ancho de la cancha?

Fuente: Propuesto por Antonio Quintero de México

Solución

El largo de la cancha es área dividido ancho = 2175 / 29 = 75

El perímetro del área grande es = 2/3 * 75 = 50

El largo del área grande es = 1/2 * 29 = 14,5

El perímetro es la suma de los lados, o sea la suma de 2 anchos y 2 largos: 2 * l + 2 * a = 50, despejando nos queda: a = (50 - 2 * 14,5) / 2 = 10,5

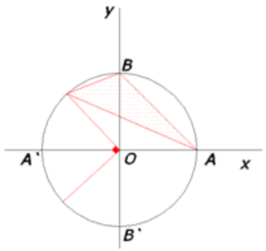
El ancho del área grande es 10,5.

Solución: Claudio Lauxmann

Problema 5

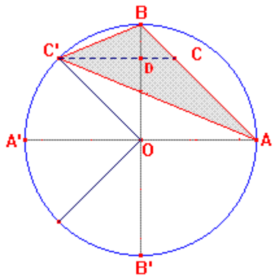
De la figura hallar el área sombreada

Fuente: Olimpo Matemático: Concurso de becas Nº 1-Lima Perú – Problema 8- Recopilado por Aldo Gil



Solución

Hallar el área sombreada:



- El ángulo $C'OA'$ = 45º, por ser la mitad de un recto.
- El ángulo *BAA'*, es un ángulo inscrito en una circunferencia que abarca el mismo arco que el ángulo central *BOA*, luego:

$$BAA' = \frac{1}{2} \cdot BOA = \frac{1}{2} \cdot 90º = 45º$$

Al ser iguales los ángulos $C'OA'$ y BAA', los segmentos OC' y AB son paralelos.

Trazamos la paralela a *OA*, pasando por *C'*, y sea *C* y *D*, respectivamente, los puntos de corte de dicha paralela con el segmento *AB* y *OB* (véase la figura).

El segmento *C'C*, divide al triángulo *ABC'* en dos triángulos, luego:

$$\boxed{Area_{ABC'} = Area_{ACC'} + Area_{CBC'}}$$

- Por construcción, *ACC'O* es un paralelogramo, siendo *AC'* su diagonal, por lo tanto:

$$Area_{ACC'} = \frac{1}{2} \cdot Area_{ACC'O} = \frac{OA \cdot OD}{2}$$

- Al ser *CC'=OA* (por ser lados opuestos de un paralelogramo), se tiene que:

$$Area_{CBC'} = \frac{CC' \cdot DB}{2} = \frac{OA \cdot DB}{2}$$

Luego, sumando ambas expresiones:

$$Area_{ABC'} = Area_{ACC'} + Area_{CBC'} = \frac{OA \cdot OD}{2} + \frac{OA \cdot DB}{2} = \frac{OA \cdot (OD + DB)}{2} = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{OA^2}{2}$$

Solución: Diana Barredo – España – Ciudad de León

Problema 6

Me quedo la gana de acomodarlo bonito y formalito, pero creo que hago bien en dejarlo así:

Hola amigos por favor si pueden ayudarme con este problema en él dice así ¿el producto de 6 números enteros (positivos) consecutivos siempre es múltiplo de : y aquí dan distintas alternativas de resultados y ellos señalan a 720 como la solución quisiera vean si esa es la solución y como la obtengo de una forma fácil , sin necesidad de una demostración matemática rigurosa (es para un instituto superior técnico) así que la solución debe ser lo mas simple posible

Fuente: Propuesto por Albert Alvarez

Solución

La solución de José Ramón es muy buena por su simplicidad, creo que vale la pena colocarla

De cada dos números consecutivos, uno es par. De cada tres, uno o dos son pares.

De cada cuatro, dos son pares... de cada seis, tres son pares.

De cada tres números consecutivos, uno es múltiplo de 3. De cada cuatro, uno o dos son múltiplos de 3... de cada seis, dos son múltiplos de 3.

De cada cuatro números consecutivos, uno es múltiplo de 4. De cada seis, al menos uno es múltiplo de 4. Lo mismo con el 5.

El 6 no lo contamos porque todo múltiplo de 6 lo es de 2 y de 3, y ya los hemos contado.

Tenemos que de cada seis números consecutivos hay tres múltiplos de 2, dos de 3, al menos uno de 4 y al menos uno de 5. Como el múltiplo de 4 lo es de 2, si contáramos los tres múltiplos de 2 lo estaríamos contando dos veces, así que lo quitamos como múltiplo de 2.

Por tanto nos queda que el producto de seis números consecutivos es divisible por $2·2·3·3·4·5 = 2^4·3^2·5 = 720$.

Solución: José Ramón Brox de España

Problema 7

En el edificio más alto de *Terra Brasilis* viven Eduardo y Augusto. El número de hangar del apartamento de Eduardo coincide con el número de apartamento de Augusto. La suma de los números de los apartamentos de ambos es 2164. Calcule el número de apartamento de Eduardo sabiendo que hay 12 apartamentos por hangar. (Por ejemplo, en el primer hangar están los apartamentos del 1 al 12, en el segundo, del 13 al 24, y así sucesivamente)

Fuente: XIX Olimpiada Brasilera de Matemática-Traducido y adaptado por Aldo Gil.

Solución

Sea a el hangar del apartamento de Eduardo. Entonces el número de su apartamento es $12(a-1)+b$, con $1 \le b \le 12$. De ahí:

$a + 12(a-1) + b = 2164$,

$b = 2176 - 13a$

$1 \le 2176 - 13a \le 12$

$a = 167$, $b = 5$

Por lo tanto, el número del apartamento de Eduardo es:

$12(a-1) + b = 12 \times 166 + 5 = 1997$.

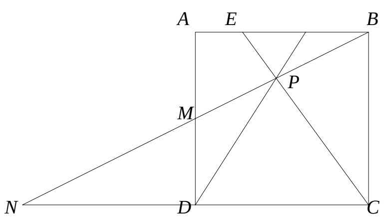
Solución: Revista Eureka-Traducido y adaptado por Aldo Gil.

Problema 8

Sea *ABCD* un cuadrado, *M* punto medio de *AD* y *E* un punto sobre *AB*. *P* es la intersección de *EC* y *MB*. Demostrar que la recta *DP* divide al segmento *EB* en dos segmentos de iguales.

Fuente: XIX Olimpiada Brasilera de Matemática-Problema 3-Traducido y adaptado por Aldo Gil.

Solución



Prolongue *BM* hasta encontrar la prolongación de *CD* en el punto *N*.

Claramente, $\Delta AMB \equiv \Delta DMN$, de aquí, $AB = DN$.

Por lo tanto, *D* es punto medio de *CN*.

Ahora bien, observamos que los triángulos *CPN* y *EPB* son semejantes luego como *PD* es mediana del triángulo *CPN*, concluimos que la prolongación de *DP* encuentra a *EB* en su punto medio.

Solución: Revista Eureka-Traducido y adaptado por Aldo Gil.

Problema 9

Les comento que una amiga argentina me escribe y está por participar en el Certamen del Número de Oro, y pues joder, se me ocurrió poner uno de allí, al buscar los archivos encontré este:

Sean dados dos triángulos semejantes no iguales, y tales que dos lados de uno de ellos son respectivamente iguales a dos lados del otro. Determine los posibles valores de la razón de semejanza. Demuestre que cada valor obtenido es razón de semejanza de un par de triángulos satisfaciendo las condiciones del problema.

Fuente: IV Certamen el Número de Oro. 1997- Problema 2

Solución

Designemos por $a \leq b \leq c$ las longitudes de los lados de un triángulo y por $a' \leq b' \leq c'$ las del otro. Si $\lambda > 1$ es la razón de semejanza, asumiremos que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$ y $c' = \lambda c$. Puesto que claramente a es menor que todos los lados del segundo triángulo, deducimos que debe ser $a' = b$ y $b' = c$. Luego:

$$\begin{cases} b' = \lambda b = \lambda a' \\ c' = \lambda c = \lambda b' = \lambda^2 a' \end{cases}$$

Teniendo en cuenta las relaciones que deben verificar los lados de un triángulo, tenemos $\lambda^2 a' = c' < a' + b' = a' + \lambda a'$, de donde sigue que $\lambda^2 - \lambda - 1 < 0$. Puesto que el número de oro ϕ es la única raíz positiva del polinomio $X^2 - X - 1$, concluimos que $1 < \lambda < \phi$, lo que da una primera respuesta al problema.

Para completarla, debemos ver que dado cualquier λ en este rango, existen dos triángulos en las condiciones del problema. Para ello, consideremos las longitudes $1/\lambda < 1 < \lambda$. Las mismas determinan un triángulo, pues $1/\lambda + 1 = (1+\lambda)/\lambda > \lambda^2/\lambda = \lambda$. Tomemos ahora un triángulo de longitudes 1, λ y λ^2. Por razones idénticas a las anteriores, dicho triángulo está bien definido y es claro que ambos triángulos satisfacen las hipótesis del problema, con λ como razón de semejanza.

Solución: Los editores, Aldo Gil la copió nomás.

<u>Problema 10</u>

Creo que hay que dar opción a los amigos del Vietnam (hay unos problemas hermosos), aunque no quedo convencido por la solución, les pido si la pueden mejorar

Resolver la ecuación: $sen^6 x + cos^6 x = ¼$.

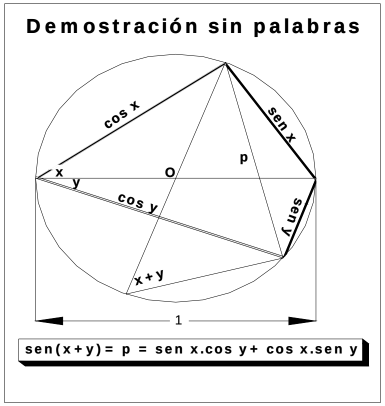
Fuente: 1era Olimpiada de Vietnam 1962- Problema 5

Solución

Sea $a = sen^2 x$, $b = cos^2 x$. Entonces a y b son números no negativos que suman 1, podemos poner sin ningún miedo $a = ½ + h$, $b = ½ - h$. Entonces $a^3 + b^3 = ¼ + 3h^2 \geq 1/4$, con la igualdad si $h = 0$. De aquí x es una solución de la ecuación dada si $sen^2 x = cos^2 x = 1/2$ ó x es un múltiplo impar de $\frac{\pi}{4}$.

Solución: Los editores, traducido y poco convencido de la solución Aldo Gil.

Demostración sin palabras



Una revista japonesa (miren hasta donde me meto), Excalibur trajo esta curiosidad que me atrevo a compartir.

Creo que habla por si sola, ojala consiga mas.
Hasta la próxima... (ya me dijeron que no me botan de las listas)

Aldo Gil Crisóstomo
Lima-Perú