Problema 1

Resolver el sistema de ecuaciones:

$x^2+xy=10$ | $y^2+xy=15$

Solución

$x^2+xy=10$

$y^2+xy=15$

Si sumamos las 2 ecuaciones tenemos $x^2+2xy+y^2=25$

$(x+y)^2=25 \therefore x+y=\pm 5$.....................(I)

Por otro lado si restamos las ecuaciones tenemos $y^2-x^2=5 \therefore (y+x)(y-x)=5$...(II)

De (I) tenemos que $x=5-y$ ó $x=y-5$

Si $x=5-y$ en (II) tenemos: $(y+5-y)(y-5+y)=5 \Rightarrow 5*(2y-5)=5 \Rightarrow$Resolviendo $y=3$ y $x=2$

Si $x=y-5$ en (II) tenemos: $(y+y-5)(y-y+5)=5 \Rightarrow 5*(2y-5)=5 \Rightarrow$Resolviendo $y=3$ y $x=-2$

El conjunto solución (x,y) es (2,3) y (-2,3)

Solución: Pablo Adrián Sussi (con un ligero retoque de Aldo)

Problema 2

Les planteo una duda del siguiente problema:

" En una especie de lotería, se eligen al azar 6 números entre 1 y 49. Los 6 que he escogido tienen la propiedad de que la suma de sus logaritmos decimales resulta ser un nº entero. En el supuesto de que el boleto premiado tenga esa propiedad, a saber, ' la suma de los logaritmos decimales de los 6 números de que consta es un nº entero', calcular la probabilidad de que el boleto ganador sea el mío"

Según mis cálculos, aplicando las propiedades de los logaritmos, para que resulte un nº entero, el producto de los 6 números extraídos ha de ser potencia de 10 (2*5). He contado 'a pelo' 4 posibles combinaciones de 6 números (entre 1 y 49) que son potencia de 10.

Pues bien, me gustaría saber si conocen o es posible alguna forma alternativa para calcular el nº de estas combinaciones.

(si hay 4 combinaciones posibles de ganar, la probabilidad pedida sería 1/4)

Fuente: Propuesto por Mariola Martínez

Solución 1

Los únicos números que pueden escogerse son los que solo tienen 2 y 5 en su descomposición factorial: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40

Entre los factores primos de los seis números debe haber tantos cincos como doses.

Descontando el 1, en el producto de los cinco números debe haber al menos 3 cincos y 3 doses, por lo que 1000 es el primer candidato al producto. Pero tampoco, pues seis números distintos formados con potencias de solo dos factores primos, implican un mínimo de ocho factores. Luego el primer producto posible es 10000.

Como hay que meter 4 cincos, podemos poner todos menos el 25, o el 25 y otros dos.

Pero si ponemos todos menos el 25, salen 6 factores 2. Por tanto, el 25 debe ir.

Tendríamos 6 posibilidades, pues debemos escoger 2 múltiplos de 5 entre cuatro, pero la única viable es:

25, 5, 10, 2, 4, 1

pues cualquier otro múltiplo par de 5 produce un exceso de factores 2.

Para 10000, necesitamos 5 cincos y cinco doses. Nuevamente el 25 es obligatorio, acompañado de 3 de los otros 4 múltiplos de 5, lo que en principio da 4 posibilidades:

25, 5, 10, 20, 4, 1

25, 5, 10, 40, 2, 1

Pero con las otras tenemos un exceso de factores 2.

Para 1000000, necesitamos 6 factores 5 y 2, por lo que tenemos que incluir los cinco múltiplos de 5. Esto completo el cupo de factores 2, por lo que solo podemos añadir un 1.

25, 5, 10, 20, 40, 1

Y no hay más, puesto que no disponemos de más factores 5. Supongo que debe ser lo mismo que hiciste tu, pero no veo otra cosa.

Solución: Ignacio Larrosa Cañestro

Solución 2

Otra ingeniosa solución... decida cual es válida.

Efectivamente, a mí me da el mismo resultado que a ti: $p=1/4$.

La forma en que he contado los casos posibles es la siguiente (no se me ha ocurrido otra forma más ingeniosa, pero seguro que alguien da con ella):

Hay 11 números, comprendidos entre 1 y 49, que no tienen factores primos distintos al 2 y al 5, a saber:

$\Rightarrow 2^n$, con $n=0,1,2,3,4,5$

$\Rightarrow 5^n$, con $n=1,2$

$\Rightarrow 5\cdot 2^n$, con $n=1,2,3$

De esos 11 números, elegimos seis (se supone que sin reemplazar) y la condición para que el la suma de sus logaritmos decimales sea un número entero es que el producto de esos seis números sea de la forma: $(10)^k = 2^k \cdot 5^k$.

El exponente de 5, en el producto de los 11 números anteriores es 6, luego sean cuál sean los 6 elegidos (de entre esos 11), el exponente del 5 tiene que ser menor o igual que 6 $\Rightarrow k \leq 6$

Para $k=6$: Tienen que intervenir los cinco números, de los 11 anteriores, que tienen el factor 5 y como, además, el exponente de 2 en el producto de esos 5 números es también 6... el sexto número de la combinación tiene que ser 1. Es decir:

La única posibilidad es ($\mathbf{1 ; 5 ; 2{\cdot}5 ; 2^2 \cdot 5 ; 5^2 ; 2^3 \cdot 5}$), quedándonos sin utilizar los cinco números: $2 ; 2^2 ; 2^3 ; 2^4 ; 2^5$

Para $k=5$: Tenemos dos posibilidades, pues podemos suprimir de dos formas distintas un cinco y un dos de la combinación anterior, sustituyendo alguno de sus elementos por los números no utilizados:

a) Sustituyendo el número $2^2 \cdot 5$. de la combinación anterior, por el número 2 $\Rightarrow$ ($\mathbf{1 ; 2; 5 ; 2{\cdot}5 ; 5^2 ; 2^3 \cdot 5}$) quedándonos sin utilizar los cinco números: $2^2 ; 2^3 ; 2^4 ; 2^5 ; 2^2 \cdot 5$.

b) Sustituyendo el número $2^3 \cdot 5$. de la combinación anterior, por el número 2^2 $\Rightarrow$ ($\mathbf{1 ; 2^2 ; 5 ; 2{\cdot}5 ; 2^2 \cdot 5 ; 5^2}$) quedándonos sin utilizar los cinco números: $2 ; 2^3 ; 2^4 ; 2^5 ; 2^3 \cdot 5$;

Para $k=4$: Sólo tenemos una posibilidad pues:

Sustituyendo el número $2^3 \cdot 5$ por 2^2 en la combinación ($1 ; 2 ; 5 ; 2{\cdot}5 ; 5^2 ; 2^3 \cdot 5$), resulta la nueva combinación: ($\mathbf{1 ; 2 ; 2^2 ; 5 ; 2{\cdot}5 ; 5^2}$) quedándonos sin utilizar: $2^3 ; 2^4 ; 2^5 ; 2^2 \cdot 5 ; 2^3 \cdot 5$ y.....

Sustituyendo el número $2^2 \cdot 5$ por 2 en la combinación ($1;2^2;5;2{\cdot}5;2^2 \cdot 5; 5^2$), resulta la combinación: ($1 ; 2 ; 2^2 ; 5 ; 2{\cdot}5 ; 5^2$) que es idéntica a la anterior.

Para $k < 4$: No existe ninguna posibilidad pues, para que $k<4$, como mucho habría tres elementos de la combinación con el factor 5, lo que implica que como mínimo habría otros tres elementos de la combinación que serían potencias distintas de 2, luego el exponente del 2 en el producto de los seis elementos de la combinación sería estrictamente mayor que 3, y la combinación no sería válida.

Luego, existen únicamente 4 formas de elegir seis números del 1 al 49 verificando la condición de que la suma de sus logaritmos decimales sea un número entero. Si mi boleto cumple esa condición, y el premiado también, la probabilidad de que tenga el boleto premiado es de 1/4, como tú habías dicho.

Solución: Diana Barredo Blanco

Brillantes ambas soluciones eh?

Problema 3

Se dispone de 3 cajas, *A*, *B* y *C* con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros.

El número de monedas de *A* excede en 2 la suma de las monedas de las otras 2 cajas. Si se traslada 1 moneda de la caja *B* a la caja *A*, esta tendrá el doble de monedas que *B*. Averigua cuantas monedas había en cada caja.

Fuente: Propuesto por Esteban99-Foro 100cia.

Solución

Sabes esto.. que

$a+b+c=36$.. (1)

A, B y C con monedas de 1 euro. Se sabe que en total hay 36 euros.

$a=b+c+2$... (2)

A excede en 2 la suma de las monedas de las otras 2 cajas y que

$a+1=(b-1)*2$...................................... (3)

Si se traslada 1 moneda de la caja B a la caja A, esta tendrá el doble de monedas que B.

Primero perdón si me olvide algo después de esto... reemplazas cual-quiera de las ecuaciones reducción a 1 incógnita

$a-2=b+c$ ....por (2)

se reemplaza en *(1)*

$a+(a-2)=36$

$a+a-2=36$

$2*a=38$

$a=38/2$

$a=19$

de (3)

$a+1=(b-1)*2$

pero $a=19$

$19+1=(b-1)*2$

$20/2=b-1$

$10=b-1$

$b=11$

de(2)

$a=b+c+2$

$19=11+c+2$

$19-11=c+2$

$8-2=c$

$c=6$

ahora vemos si son consistentes

$(19+11+6)=36$

con lo que $a=19$ $b=11$ $c=6$

Mira creo que ahí esta.. Pero lo más difícil de esto es pasar la parte de palabras a lenguaje matemático... y seguro que las cuentas que son lo más importante.

Solución: Gino

Problema 4

La edad de 2 niños será dentro de 3 años un cuadrado perfecto y hace 3 años su edad era la raíz cuadrada de este cuadrado. Hallar los años. (Supongo que la edad se refiere a la suma de la de los dos niños)

Fuente: Propuesto por Moisito-Foro 100cia.

Solución

Te doy el procedimiento para resolverlo hice mis propias consideraciones supuse que la edad de ellos eran iguales $x=y$ saco las ecuaciones

$x+3=n^2$

$x-3=n$ por el método de suma y resta

$2x=n^2+n$ resolvemos esta cuadrática

y obtenemos como soluciones

$n=\frac{-1+\sqrt{1+8x}}{2}$ pero como $n=x-3$ igualamos estas expresiones después de simplificar resulta: $2x-5=\sqrt{1+8x}$ y elevando al cuadrado

$4x^2-20x+25=1+8x$ trasponiendo términos y resolviendo la cuadrática

$x^2-7x+6=0$

las soluciones son $x=6$ y $x=1$

la solución del problema es 6 comprobando

$6+3=9$

$6-3=3$

Solución: Galvanert

Problema 5

Hola a todos. Este es mi primer post aunque llevaba tiempo leyendo el foro. Quería saber que pasos me recomendáis seguir para resolver este problema de teoría de números (no pido demostración solo sugerencias), que por cierto no se me dan muy bien...

Determinar todos los pares (a,b) de números racionales tales que $2a$ y a^2+5b^2 sean números enteros.

Fuente: Pablo Aiacos-Foro 100.ciai

Solución

A ver si me sé explicar.

Si $2a$ tiene que ser entero es evidente que te valen para esta primera afirmación sólo los números $n(1/2)$ donde n es entero. O sea 0.5 ,1, 1.5, etc... Así como sus negativos.

En el segundo caso (como son cuadrados) voy a suponer que tanto a como b son positivos puesto que daría exactamente igual que fuesen negativos.

Teniendo en cuenta lo dicho antes a^2 podríamos descomponerlo en $a^2=(c+d)$ donde c sería la parte entera y d la parte decimal que (sabiendo que a es múltiplo de 1/2) debe ser o bien 0 o bien 1/4. Por tanto: $c+d+5b^2$ es entero.

Puesto que c es entero $\Rightarrow d+5b^2$ es entero

Esto nos lleva a dos posibles casos:

1º Si $d=0$ entonces $5b^2$ es entero

Por lo que o b^2 es entero o b^2 es múltiplo de $1/5 \Rightarrow b^2=n(1/5)$ $\Rightarrow b=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5}}$

Por la reducción al absurdo de la racionalidad de la raíz cuadrada de 2 (de Pitágoras) y su generalización para cualquier entero, sabemos que la raíz de un entero o bien es entera o es irracional.

Luego como $\sqrt{5}$ es irracional b tendría que serlo para el caso $b^2=n(1/5)$. De ahí se deduce que b debe ser entero.

Aplicando la misma regla sabemos que b^2 ha de ser además un cuadrado perfecto puesto que si no b^2 no sería entero.

2º Si $d=1/4$ entonces $1/4+5b^2$ es entero

Esto implica que $5b^2$ debe ser igual a un entero más $3/4 \Rightarrow 5b^2=n+3/4$ por lo que:

$$b=\frac{\sqrt{\frac{n+3}{4}}}{\sqrt{5}}$$

Por lo mismo de antes y sabiendo que $\sqrt{5}$ es irracional b debería ser racional, por lo que este segundo caso no es posible a menos que $n+3/4$ sea 5 por otro entero g. Es decir:

$n+3/4=g*5$ o sea

$n=g*5-3/4$ $\Rightarrow b=\frac{\sqrt{5g-3/4+3/4}}{\sqrt{5}}=\sqrt{g}$

Puesto que b debe ser racional, g ha de ser un cuadrado perfecto, esto implica que b es entero. Por lo que la opción 2 queda descartada puesto $b^2+1/4$ no podría ser entero con un b entero.

En conclusión, a y b sólo han de ser enteros y por tanto si y sólo si tanto a como b

son enteros se cumplen ambas afirmaciones.

Espero que te sirva.

Solución: Macedonio

Problema 6

Como se resuelve la siguiente ecuación:

$e^{\log x^3} + \log \frac{1}{x^2} = 2$ para $x>0$

Y esta como sería:

$2^x - 1 + 2^x + 2^x + 1 = 7$

Fuente: ida24-100cia.com

Solución

La primera: $e^{\log x^3} + \log \frac{1}{x^2} = 2$

Porque de ser como lo indican los paréntesis entonces no se puede resolver analíticamente. Salen 2 valores:

$X_1 = 2.1125348...$ y $X_2 = 0.1064126...$

La segunda queda así:

$3 * 2^x = 7$

$Log(3*2^x) = Log7$

$Log\ 3 + Log\ (2^x) = Log7$

$Log\ 3 + x\ Log\ 2 = Log7$

$x = (Log7 - Log3)/Log2$

$x = log(7/3)/log2$

$x = 1.222392421336...$

Solución: Tuzania

Problema 7

Tres profesores A,B,C es ó un matemático ó un científico de computadoras, y tienen la siguiente discusión:

A: *C* y yo son matemáticos.

B: *C* no es matemático.

C: *B* es matemático ó *A* es un científico de computadores

Dado que los matemáticos siempre dicen la verdad y los científicos de computadoras siempre mienten, ¿puede determinar las especialidades de *A*,*B* y *C*?

Fuente: Ontario Sección S –Traducido y adaptado por Aldo Gil

Solución 1

Lo he resuelto mediante una tabla de verdad:

A: C y yo son matemáticos.

B: C no es matemático.

C: B es matemático ó A es un científico de computadores

0: Verdad, 1 Mentira

	A	B	C
D1	0	0	0
D2	0	0	1
D3	0	1	0
D4	0	1	1
D5	1	0	0
D6	1	0	1
D7	1	1	0

Las aserciones de *A* y *B* son contradictorias, luego uno de los dos miente (ni los dos dicen la verdad ni los dos mienten), por lo que *D1, D2, D7* y *D8* no son posibles.

Quedan como posibles

	A	B	C
D3	0	1	0
D4	0	1	1
D5	1	0	0
D6	1	0	1

C dice que ó *B* dice la verdad ó *A* miente. Como sabemos que necesariamente entre *A* y *B* uno de los dos miente y otro no, quedan dos posibilidades: que *C* diga la verdad (*B* diga la verdad y *A* mienta) ó que *C* mienta (y entonces *A* diga la verdad y *B* mienta). La opción de que *C* diga la verdad es imposible, porque *C* dice que *A* miente y *A* dice que *C* dice la verdad, lo que es contradictorio. Por tanto *C* miente. Así que eliminamos *D3* y *D5*. Quedan como posibles

	A	B	C
D4	0	1	1
D6	1	0	1

Como *A* dice que *C* dice la verdad y sabemos que no es así, entonces *A* miente. Eliminamos *D4*. Quedan como posibles

	A	B	C
D6	1	0	1

Por tanto *A* y *C* son científicos de computadoras y *B* es un matemático.

Solución: Enrique Maldonado

Solución 2

Supongamos que *A* es matemático, entonces *C* también (porque lo dice *A*) y *B* sería científico de computadoras (por mentir respecto de la especialidad de *C*). Ahora bien, fijándonos en lo que dice *C*, llegamos a una contradicción pues es una falsedad y *C* no puede mentir al ser matemático. Conclusión: <u>*A* es científico de computadoras</u>:

Al ser *A* científico de computadoras, *C* está diciendo la verdad, luego <u>C es matemático</u>

Al ser *C* matemático, entonces *B* está mintiendo y, por lo tanto, <u>*B* es un científico de computadoras</u>.

Solución: Diana Barredo

<u>Solución 3</u>

Bo que pasa a todos.

Supongamos que *A* sea matemático. Como dice que él y *C* lo son, y supuestamente dice la verdad, entonces *C* también debe ser uno de esos grandes seres (ejem :*D*). Como *C* dice la verdad, y *A* no es científico de computadoras, necesariamente *B* sería matemático. Pero era demasiado bonito para ser verdad. Al ser *B* matemático, tenemos que *C* no es matemático y llegamos a una contradicción.

Por lo tanto *A* es un científico de computadoras. Entonces la disyunción que plantea *C* es cierta pase lo que pase con *B*, por lo que *C* sí sigue siendo matemático, y como *B* se sigue empeñando en que no, tenemos que *B* es otro científico de computadoras.

En conclusión, hay dos científicos de computadoras, Alfonso y Benito, y sólo Carlos es matemático (para darle algo más de vidilla al enunciado: D).

Solución: Alberto Castaño Domínguez

Presentamos las soluciones llegadas, como no tengo la solución "oficial", y a propósito de esto me pregunto: ¿Siempre debe haber una solución oficial?, ¿siempre debe haber una solución irrefutable? La verdad no tengo una respuesta ni oficial ni irrefutable de esta pregunta existencial.

Au Revoir.

<u>Problema 8</u>

Aquí va otro de mis viejos tiempos

Dadas las cifras: 0,2 y 4 del sistema de base *n*, asignando el menor valor a *n* y utilizando por lo menos una vez dichas cifras formar el menor número capicúa de 5 cifras de dicha base.

Fuente: Aldo Gil Año 1970- Academia Matemática Sigma

<u>Solución</u>

Sea el número solicitado $\overline{abcba}_n$

Como *a* puede ser 2,4 (0 no debido a que es un numeral de 5 cifras)

b y *c* pueden ser 0,2,4

Como n es el menor posible: $\therefore$ $n=5$ (el siguiente de 0,2,4)

Para el valor de *a*: Como es el menor posible $\Rightarrow$ $a=2$.

Para el valor de b: Como es el menor posible $\Rightarrow$ $b=0$ y obviamente $c=4$

El numeral será: 20402_5

<u>Problema 9</u>

Este fue publicado por el autor (o sea yo) allá por 1984 más o menos:

Dos trenes parten al mismo tiempo y a su encuentro de dos ciudades *A* y *B* distantes *L* kilómetros y el encuentro se realiza a <u>*x*</u> kilómetros de *A*. Si el que parte de *A* hubiera salido *h* horas antes que el otro, el encuentro hubiera sido en el punto medio del camino. Hallar la velocidad de B.

Fuente: Aldo Gil Año 1985- Publicación Extraordinaria

<u>Solución</u>

El tiempo inicial es el mismo para ambos

$t_a = t_b$, luego $\frac{x}{Va} = \frac{L-x}{Vb}$.

Nos dicen que luego: $t_a - t_b = h$, *espacios iguales.*

$\therefore \frac{L/2}{Va} - \frac{L/2}{Vb} = h \Rightarrow$

$\frac{L}{2(x/(L-x))Vb} - \frac{L}{2Vb} = h$

Resolviendo: $Vb = \frac{L^2 - 2xL}{2xh}$.

<u>Problema 10</u>

Un interesante problema que requiere de una investigación con relación a cierta propiedad que se aplica en su solución, tomado de J.I.R. McKnight Problems Contest 1986.

Probar que un triángulo acutángulo *ABC*, se cumple la igualdad:

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S},$$

donde *S* es el área del triángulo

<u>Solución</u>

Usaremos las siguientes fórmulas:

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\quad sen A = \frac{a}{2R}$, donde *R* es el circunradio del triángulo *ABC*, y $S = \frac{abc}{4R}$.

De aquí, tenemos: $\cot A = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{abc}$.

Usando esta ecuación para *cot B* y *cot C*, tenemos:

$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$

Solución: Crux Mathematicorum – Adaptado y traducido por Aldo Gil

NUMEROS PERSISTENTES

Me parece muy interesante esta conjetura sobre los números persistentes, este comentario lo traje de una lista enviado por Paco Rivera, y creo útil compartirlo.

Hola amigos quizás este tipo de números ya los han mencionado en la lista, pero lo comento por si no, o por si hay quien aún no los conoce.

Veamos la serie: 939, 243, 24, 8. cada término siguiente se obtiene multiplicando los dígitos del término anterior y se dice que la *persistencia* de un número es el número de pasos que se da hasta obtener un sólo dígito. En este ejemplo la *persistencia* del número 939 es de 3.

Esto lo vi en un libro de Clifford A. Pickover. Pareciera algo simple, pero para encontrar números de *persistencia* mayor a cuatro, la cosa se vuelve ya muy complicada... parece ser que ningún número menor a 10^{50} no tiene persistencia menor a 11.

Creo que de esto se pueden sacar muchas conjeturas...

Reciban un cordial saludo...

Hasta la próxima... si no me han botado de las listas
Aldo Gil Crisóstomo